ACTA
MATHEMATICA

ACTA

MATHEMATICA

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT HERAUSGEGEBEN VON

JOURNAL RÉDIGÉ PAR

G. MITTAG-LEFFLER

19

STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
1895.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
MARKGRAFENSTRASSE 51.

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE

INHALTSVERZEICHNISS. — TABLE DES MATIÈRES.

BAND 19. — 1895. — TOME 19.

	Seite. Pages.
COUSIN, PIERRE. Sur les fonctions de n variables complexes	1— 62
GOURSAT, E. Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre, et sur la théorie des intégrales intermédiaires	285—340
HURWITZ, A. Über die Anzahl der Classen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante...	351—384
KANTOR, S. Neue Theorie der eindeutigen periodischen Transformationen in der Ebene...	115—194
LECORNU, LÉON. Mémoire sur le pendule de longueur variable	201—250
LIOUVILLE, R. Sur les équations de la dynamique ...	251—284
MARKOFF, ANDRÉ. Deux démonstrations de la convergence de certaines fractions continues ...	93—104
MEYER, FRANZ. Über die Structur der Discriminanten und Resultanten von binären Formen...	385—395
NETTO, E. Zur Theorie der orthogonalen Determinanten	105—114
SÉLIVANOFF, D. Sur les expressions algébriques ...	73— 92
STÖRMER, CARL. Sur une généralisation de la formule $\frac{\varphi}{2}=\frac{\sin\varphi}{1}-\frac{\sin 2\varphi}{2}+\frac{\sin 3\varphi}{3}-\dots$	341—350
VAHLEN, K. TH. Über reductible Binome ...	195—198
VAHLEN, K. TH. Über die Steinersche Fläche ...	199—200
WIMAN, A. Über die Doppelcurve auf den geradlinigen Flächen	63— 72

SUR LES FONCTIONS
DE n VARIABLES COMPLEXES

PAR

PIERRE COUSIN

À CAEN.

Introduction.

Dans un mémoire remarquable publié dans le tome 2 des Acta mathematica M. Poincaré a démontré le théorème suivant:

Si une fonction analytique de deux variables complexes n'admet à distance finie que des singularités non essentielles elle est le quotient de deux fonctions entières.

Le mémoire de M. Poincaré est le seul travail publié sur cette importante question. Je me suis proposé d'établir pour les fonctions de n variables complexes un théorème plus général que celui de M. Poincaré, en employant à cet effet un procédé de démonstration qui m'est personnel.

Je me suis efforcé dans cette étude d'établir la plus grande analogie possible avec la théorie connue des fonctions d'une seule variable complexe.

M. Mittag-Leffler a, dans un théorème devenu classique, démontré l'existence et donné l'expression analytique d'une fonction d'une variable complexe n'admettant pour points singuliers que des points donnés à l'avance et formant un ensemble dénombrable dont le seul point limite est le point ∞ et telle qu'en chacun de ses points singuliers elle se comporte comme une fonction donnée. Deux théorèmes importants dus à M. Weierstrass peuvent être considérés comme des conséquences successives, du théorème de M. Mittag-Leffler; le premier est relatif à

l'existence d'une fonction entière admettant pour zéros des points donnés à l'avance; le second relatif à l'expression sous forme d'un quotient de deux fonctions entières d'une fonction d'une variable qui n'admet comme points singuliers que des pôles. Ces trois théorèmes forment un ensemble de trois propositions intimement reliées entre elles. Je crois être arrivé à donner pour les fonctions de n variables complexes un groupe de trois propositions correspondant aux trois précédentes, et reliées entre elles d'une façon analogue. Toutefois, en ce qui concerne la deuxième de ces propositions, une différence importante s'impose entre le cas d'une variable et le cas de plusieurs variables; elle est due à ce fait qu'une fonction régulière d'une seule variable n'admet pour zéros que des points isolés, tandis que les zéros d'une fonction de plusieurs variables complexes ne sont jamais des points isolés; le problème ne se présente donc plus de la même façon dans les deux cas; les énoncés des théorèmes VI et IX indiqueront comment on peut poser le problème dans le cas de n variables complexes.

Parmi les travaux se rattachant aux questions que j'ai traitées je signalerai, outre le mémoire précité de M. Poincaré, deux extensions aux fonctions de n variables complexes du théorème de M. Mittag-Leffler données par M. Appell [1] et par M. Dautheville. [2]

Pour l'exposition, j'ai divisé mon travail en quatre parties.

La première contient la démonstration de quelques propositions préliminaires, qui sont, je crois, pour la plupart nouvelles; toutefois M. Painlevé [3] a déjà donné une proposition analogue, moins générale.

La deuxième partie est consacrée à la démonstration d'un théorème qui est, pour la suite, d'une importance capitale.

La conclusion de la troisième partie est le théorème suivant:

Si une fonction de n variables complexes n'admet que des singularités non essentielles à l'intérieur de n cercles ayant pour centres les n origines et dont chacun a un rayon fini ou infini, cette fonction est le quotient de deux séries entières par rapport aux n variables, convergentes à l'intérieur des n cercles.

---

[1] Acta mathematica, tome 2, page 71.

[2] Thèse, Paris, Gauthier-Villars, pages 44 et 50.

[3] Thèse, Paris, Gauthier-Villars 1887, page 68.

La quatrième partie a pour but la démonstration de quelques théorèmes qui sont, dans une certaine mesure, l'extension pour n variables des théorèmes donnés pour une variable par M. Mittag-Leffler dans le tome 4 des Acta mathematica.

En terminant cette introduction, qu'il me soit permis de remercier MM. Poincaré et Appell pour le bienveillant accueil qu'ils ont fait à mes premières recherches, et de leur exprimer ici ma profonde reconnaissance.

I.

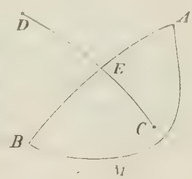
Propositions préliminaires.

1. J'emploierai pour les variables complexes la représentation géométrique ordinaire: chaque variable sera représentée par un point d'un plan.

J'établirai d'abord quelques propriétés de la fonction $\varphi(y)$ définie par l'égalité:

$$\varphi(y) = \frac{1}{2i\pi}\int_{AEB} \frac{dz}{z-y}. \tag{1}$$

y et z sont deux variables complexes représentées sur le même plan: l'intégrale est prise le long du chemin AEB de A vers B; je suppose pour plus de simplicité que ce chemin ne présente aucune boucle. Pour distinguer entre les points A et B, je dirai que A est *l'origine* et B *l'extrémité* du chemin d'intégration; lorsque cette distinction ne sera pas nécessaire les deux points A et B seront appelés les deux extrémités du contour d'intégration: aucune confusion ne pourra résulter par la suite de cette désignation.



Soit CED un chemin supposé *parcouru* de C *vers* D et traversant AEB en un seul point E; je trace la ligne AMB ne traversant pas CE et telle que le point C soit intérieur au contour $AMBEA$: si le sens AEB est direct sur le périmètre du contour $AMBEA$, je

dirai que CED traverse AB dans le sens direct: dans le cas contraire CED sera dit traverser AB dans le sens indirect.

La fonction $\varphi(y)$ qui est définie par l'égalité (1), est régulière en tout point qui n'est pas situé sur le chemin d'intégration AEB: ce chemin AEB est une *coupure* pour la fonction $\varphi(y)$.

L'expression explicite de $\varphi(y)$ est d'ailleurs, en désignant par a et b les valeurs de z correspondant aux deux points A et B:

$$\varphi(y) = \frac{1}{2i\pi} \log \frac{b-y}{a-y}$$

en prenant pour le logarithme une détermination convenablement choisie.

De cette expression explicite de $\varphi(y)$ se déduisent les propositions suivantes:

1°. Si l'on fait parcourir au point y un chemin CED traversant AB au seul point E, la *continuation analytique* de $\varphi(y)$ est régulière au point E et en tout point de ED; l'expression de cette continuation analytique est en tout point de ED donné par: $1 + \varphi(y)$, si CED traverse AB dans le sens direct; et par: $-1 + \varphi(y)$ dans le cas contraire.

2°. La continuation analytique de la différence:

$$\varphi(y) - \frac{1}{2i\pi} \log(b-y),[1]$$

est régulière au point B; et la continuation analytique de:

$$\varphi(y) + \frac{1}{2i\pi} \log(a-y)$$

est régulière au point A.

2. Je considère une fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ des $(n+1)$ variables complexes $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$ représentées géométriquement sur $(n+1)$ plans différents. $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ sont n contours fermés, simples ou complexes, tracés respectivement sur les n plans des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; l'ensemble de ces contours sera désigné par γ; l'ensemble des valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sera le point x; je dirai que x est intérieure à γ si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont respectivement intérieures à $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$.

---

[1] La détermination à prendre pour $\log(b-y)$ est arbitraire.

Pour abréger l'écriture, j'écrirai $f(x, y)$ au lieu de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ toutes les fois qu'il n'en pourra résulter aucune confusion.

Γ désigne un contour fermé, simple ou complexe du plan de la variable y; (x, y) sera dit intérieur à (γ, Γ) si x et y sont respectivement à l'intérieur de γ et Γ.

Cela posé, je suppose la fonction $f(x, y)$ régulière tant que x est dans γ et y dans Γ.

Je définis une fonction $\Phi(x, y)$ des $(n + 1)$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$ par l'égalité:

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_{AEB} \frac{f(x, z)\, dz}{z - y}, \tag{2}$$

z est représenté sur le même plan que la variable y; le chemin d'intégration AEB est supposé tout entier à l'intérieur de Γ.

La fonction ainsi définie est régulière pour x intérieur à γ et y quelconque dans son plan, mais non situé sur la ligne d'intégration AEB; cette dernière est pour $\Phi(x, y)$ une *coupure* relative à la seule variable y.

Je vais étudier la continuation analytique de $\Phi(x, y)$ lorsque y traverse le chemin AEB, x se déplaçant en même temps d'une façon quelconque à l'intérieur de γ.

Pour cela, je remarquerai d'abord que la fonction $\frac{f(x, z) - f(x, y)}{z - y}$ est régulière pour x intérieur à γ et y et z intérieurs à Γ. Soit, en effet: $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n, y = b, z = c$ un point intérieur à (γ, Γ); si b n'est pas égal à c, il est clair que la fonction considérée est régulière en ce point. Je suppose donc $c = b$, et je pose:

$$x_p = x'_p + a_p, \qquad (p=1, 2, \ldots, n)$$

$$y = y' + b,$$

$$z = z' + b.$$

Je trace sur les plans des n variables x, n cercles de rayon R de centres $a_1, a_2, \ldots, a_n$, en supposant R assez petit pour que ces n cercles soient respectivement intérieurs à $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$; et sur le plan de la variable y, je trace un cercle de centre b et de rayon ρ assez petit pour que ce cercle soit intérieur à Γ.

Je désigne par C l'ensemble des $(n+1)$ cercles tracés. La fonction $f(x, y)$ est développable en série entière en $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, y'$, convergente à l'intérieure de C; soit:

$$\Sigma A x_1'^{\alpha_1} x_2'^{\alpha_2} \ldots x_n'^{\alpha_n} y^{\beta}$$

ce développement; en y remplaçant chaque coefficient A par son module $|A|$, les variables x par R, et y par ρ, on obtient une série convergente:

$$\Sigma\ |A|\, R^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} \rho^{\beta}. \tag{3}$$

On a à l'intérieur de C:

$$\frac{f(x, z) - f(x, y)}{z - y} = \frac{\Sigma A x_1'^{\alpha_1} x_2'^{\alpha_2} \ldots x_n'^{\alpha_n} (z'^{\beta} - y'^{\beta})}{z' - y'}.$$

En effectuant la division par $z' - y'$ de chaque terme du second membre, on est conduit à la série:

$$\Sigma A x_1'^{\alpha_1} x_2'^{\alpha_2} \ldots x_n'^{\alpha_n} (z'^{\beta-1} + z'^{\beta-2} y' + \ldots + z' y'^{\beta-2} + y'^{\beta-1}) \tag{4}$$

qui devient, en remplaçant chaque coefficient A par son module $|A|$, les x par R, et y et z par un nombre positif r:

$$\Sigma \beta |A|\, R^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} r^{\beta-1} \tag{5}$$

cette dernière série est convergente pour $r < \rho$, comme étant la dérivée par rapport à r de la série (3) où l'on aurait remplacé ρ par r.

La série (4) est donc absolument convergente dans C; par suite $\frac{f(x, z) - f(x, y)}{z - y}$ est régulière au point $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$, $x_3 = a_3$, ..., $x_n = a_n$, $y = z = b$, ce que je voulais établir.

On peut dès lors poser:

$$\frac{f(x, z) - f(x, y)}{z - y} = F(x, y, z),$$

$F(x, y, z)$ étant régulière en tout point (x, y, z) intérieur à (γ, Γ).

L'égalité (2) peut être maintenant écrite pour (x, y) intérieur à (γ, Γ) sous la forme:

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{AEB} F(x, y, z)\, dz + \frac{f(x, y)}{2i\pi} \int_{AEB} \frac{dz}{z - y}$$

ou en posant comme précédemment:

$$\varphi(y) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{AEB} \frac{dz}{z-y},$$

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_{AEB} F(x, y, z)dz + \varphi(y) f(x, y).$$

L'intégrale qui figure au second membre est une fonction de x et y régulière en tout point intérieur à (γ, Γ): il en est de même par hypothèse de $f(x, y)$; enfin la fonction $\varphi(y)$ a été étudiée dans le paragraphe précédent. On en conclut immédiatement les propriétés suivantes de $\Phi(x, y)$:

1°. Si l'on fait parcourir au point y un chemin CED (de C vers D) contenu à l'intérieur de Γ et traversant AEB au seul point E, tandis que x se déplace d'une façon quelconque à l'intérieur de γ, la continuation analytique de $\Phi(x, y)$ est régulière au point E et en tout point de ED: elle a pour expression $\Phi(x, y) + f(x, y)$ si CED traverse AB dans le sens direct et pour expression: $\Phi(x, y) - f(x, y)$ dans le cas contraire.

2°. a et b étant les valeurs de z qui correspondent aux points A et B, la continuation analytique de la différence:

$$\Phi(x, y) - \frac{f(x, y)}{2i\pi} \log(b - y),$$ [1]

est régulière au point B et celle de:

$$\Phi(x, y) + \frac{f(x, y)}{2i\pi} \log(a - y)$$

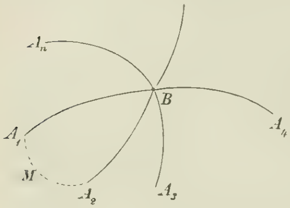
est régulière au point A.

3. Soient n chemins d'intégration $A_1B, A_2B, \ldots, A_nB$ tracés sur le plan commun aux deux variables y et z, et ayant *l'extrémité B* commune; le sens d'intégration est pour chaque contour de A vers B. Ces contours sont supposés ne pas se couper et n'ont par suite aucun

---

[1] La détermination à prendre pour $\log(b - y)$ est arbitraire.

autre point commun que B; de plus on suppose qu'en parcourant dans le sens direct un petit cercle de centre B, on rencontre les contours précédents dans l'ordre: $A_1 B$, $A_2 B, \ldots, A_n B$ c'est à dire par ordre d'indices croissants. Je trace alors la ligne $A_1 M A_2$ de façon qu'il n'y ait aucun des contours précédents à l'intérieur du contour fermé $A_1 B A_2 M A_1$.



A chaque chemin $A_p B$, je fais correspondre une fonction $f_p(x, y)$ de $(n + 1)$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$ régulière pour x intérieur à un contour fermé Γ et pour y intérieur à un certain contour fermé C_p enveloppant le chemin $A_p B$. Le contour Γ est le même pour les n fonctions $f_p(x, y)$.

Je pose:

$$\varphi_p(x, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{A_p B} \frac{f(x, z)\,dz}{z - y};$$

l'intégrale est prise le long de $A_p B$ de A_p vers B; la fonction $\varphi_p(x, y)$ est de la forme de celle qui a été étudiée dans le paragraphe précédent.

Je définis une fonction $\Phi(x, y)$ pour x intérieur à Γ et y intérieur à $B A_1 M A_2 B$ par l'égalité:

$$\Phi(x, y) = \Sigma \varphi_p(x, y); \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

cette fonction est régulière en tout point intérieur à la région où je la suppose ainsi définie.

Je vais donner la condition nécessaire et suffisante pour que l'extension analytique de $\Phi(x, y)$ soit régulière au point B, x étant toujours supposé à l'intérieur de Γ.

Si b est la valeur de y correspondant au point B, l'extension analytique de la différence

$$\varphi_p(x, y) - \frac{1}{2i\pi} f_p(x, y) \log(b - y)$$

est régulière au point B; il en sera de même de la continuation analytique de:

$$\Sigma \varphi_p(x, y) - \frac{1}{2i\pi} \Sigma f_p(x, y) \log(b - y) \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

c'est-à-dire de:

$$\Phi(x, y) - \frac{1}{2i\pi}\log(b-y)\Sigma f_p(x, y).$$

La somme $\Sigma f_p(x, y)$ est régulière au point B comme chacune des fonctions qui la composent (x restant toujours dans Γ).

La condition nécessaire et suffisante pour que l'extension analytique de $\Phi(x, y)$ soit régulière au point B sera donc que:

$$\Sigma f_p(x, y) = 0,$$

identité qui a un sens bien précis pour y dans le domaine de B, x étant toujours quelconque dans Γ.

4. Un cas particulier dont la considération sera utile plus loin est celui où la somme précédente se réduit à un multiple de $2i\pi$; soit:

$$\Sigma f_p(x, y) = 2ik\pi.$$

La continuation analytique de la différence

$$\Phi(x, y) - \log(b-y)^k$$

est alors régulière au point B.

II.

Démonstration d'un théorème fondamental.

5. Les propositions qui sont l'objet du présent travail, sont la conséquence d'un théorème fondamental que je vais exposer dans cette deuxième partie.

Il sera tout d'abord question de fonctions de $(n + 1)$ variables complexes de la nature suivante: chacune de ces fonctions est définie à l'intérieur d'une certaine région pour tous les points de laquelle elle n'est pas supposée régulière, mais dans laquelle elle est *monotrope* et

n'admet pas *d'espace lacunaire.* Cette dernière condition signifie d'une façon précise que si M désigne un point quelconque de la région considérée, il existe un point aussi voisin que l'on veut de M pour lequel la fonction est régulière.

Si deux fonctions de cette nature se trouvent définies simultanément à l'intérieur d'une même portion d'aire et si leur différence est régulière en tout point de cette aire, je dirai que les deux fonctions sont *équivalentes* dans la portion d'aire considérée; si leur différence est régulière en un point, les deux fonctions seront *équivalentes* en ce point.

La condition nécessaire et suffisante pour que deux fonctions F et Φ soient équivalentes en un point M, est que l'on ait pour les points situés dans le domaine de M:

$$F = \Phi + f,$$

f étant une fonction régulière en M.

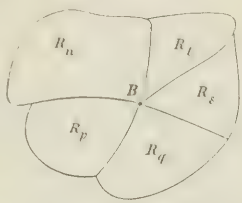
Il est clair que deux fonctions équivalentes en un point à une même troisième sont équivalentes entre elles.

Cela posé, soit Γ un ensemble de contours fermés simples ou composés $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ tracés respectivement sur les n plans des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Dans tout ce paragraphe le point x $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sera constamment supposé à l'intérieur de Γ et pourra être quelconque dans Γ; les seules distinctions à faire dans la position des points représentant des variables porteront sur une $(n+1)^{\text{ème}}$ variable y; de telle sorte que quand je dirai que la fonction $f(x, y)$ de $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$ est régulière en un point du plan de la variable y, cela signifiera qu'elle est régulière en ce point quel que soit x à l'intérieur de Γ.

Soit S une aire connexe du plan de la variable y: cette aire S est subdivisée en régions $R_1, R_2, \ldots, R_p \ldots$ en nombre quelconque mais fini, et dont chacune est limitée par un contour fermé simple. Deux régions R_n et R_p seront dites contiguës si elles ont une portion commune de périmètre: cette portion commune sera désignée par l_{np}; l_{np} peut être une ligne continue, ou bien être composée d'un certain nombre de lignes continues distinctes mais en nombre fini: les extrémités de l_{np} seront les extrémités des différentes lignes qui la composent; l_{np} est la ligne que y doit traverser pour passer de la région R_n à la région R_p sans entrer dans une autre région que ces deux-là; j'aurai à envisager des intégrales

pour lesquelles le chemin d'intégration sera l_{np}; j'établis à cet effet la distinction suivante entre les deux notations l_{np} et l_{pn}: l_{np} sera parcourue pour l'intégration dans le sens qui est direct sur le périmètre de R_n; l_{pn} sera parcourue dans le sens qui est direct sur le périmètre de R_p: ainsi l_{np} et l_{pn} désigneront le même chemin d'intégration mais avec des sens différents; il résulte de là que y, en passant de R_n à R_p traversera l_{np} dans le *sens direct,* et l_{pn} dans le *sens indirect.*

J'aurai encore à considérer les points qui sont communs aux périmètres de plus de deux régions, tout en étant intérieurs à S (et non sur son périmètre); ces points seront appelés des *nœuds;* soit B un de ces nœuds; si j'appelle $R_n, R_p, R_q, \ldots, R_s, R_t$ les régions que l'on traverse successivement en faisant le tour du point B dans le sens direct, B est *l'extrémité* commune aux chemins d'intégration $l_{np}, l_{pq}, \ldots, l_{st}, l_{tn}$; les régions $R_n, R_p, R_q, \ldots, R_s, R_t$ seront dites *attenantes* au nœud B.



A chaque région R_p je fais correspondre une fonction des $(n + 1)$ variables complexes $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$, $f_p(x, y)$ définie pour x intérieur à Γ et pour y intérieur à un contour fermé $\mathfrak{R}_p$ enveloppant R_p: à l'intérieur de la région où elle est définie $f_p(x, y)$ est supposée *monotrope et sans espace lacunaire;* on fait de plus l'hypothèse suivante: si R_p et R_n sont deux régions contiguës, $\mathfrak{R}_p$ et $\mathfrak{R}_n$ ont une portion d'aire commune où les deux fonctions $f_p(x, y)$ et $f_n(x, y)$ sont simultanément définies; on suppose que ces deux fonctions sont *équivalentes* dans la portion d'aire où elles sont simultanément définies; l_{np} étant tout entière dans cette portion d'aire, il résulte de là que la différence $f_n(x, y) - f_p(x, y)$ sera régulière en tout point de l_{np}, y compris ses extrémités.

Si A est un point intérieur à R_p, je dirai que $f_p(x, y)$ est la fonction correspondant au point A; et si A est un point commun aux périmètres de plusieurs régions R_p, R_q, R_s etc. la fonction correspondant au point A sera l'une quelconque, prise à volonté, des fonctions $f_p(x, y)$, $f_q(x, y)$, $f_s(x, y)$ etc.

Voici le théorème que je vais établir:

Théorème fondamental. *Il existe une fonction* $F(x, y)$ *monotrope et*

sans espace lacunaire définie pour x intérieur à Γ et y intérieur à S et qui, en chaque point intérieur à S, est équivalente à la fonction correspondant à ce point.

L'expression point intérieur à S, employée dans l'énoncé précédent, exclut les points situés sur le périmètre de S.

Définition des fonctions $I_{np}(x, y)$ et $\Phi(x, y)$. Pour le démontrer, je pose, R_n et R_p étant deux régions contiguës:

$$I_{np}(x, y) = \frac{1}{2i\pi} \int_{l_{np}} \frac{f_p(x, z) - f_n(x, z)}{z - y} dz;$$

z est une variable complexe représentée sur le même plan que la variable y; l'intégrale est prise le long de l_{np}; si l_{np} se compose de plusieurs lignes continues distinctes, $I_{np}(x, y)$ est alors la somme d'intégrales analogues à la précédente dont les chemins d'intégration sont les différentes lignes continues composant l_{np}. Comme en tout point de cette ligne l_{np}, $f_p(x, z) - f_n(x, z)$ est régulière par hypothèse, l'intégrale précédente est de la forme de celles étudiées au paragraphe 2. $I_{np}(x, y)$ est régulière pour toute valeur de y excepté le long de l_{np} qui est une *coupure* pour cette fonction.

Il importe de remarquer que:

$$I_{np}(x, y) = I_{pn}(x, y),$$

car par la permutation des indices p et n le sens de l'intégration change en même temps que le signe de la fonction intégrée.

Soit posé:

$$\Phi(x, y) = \Sigma I_{np}(x, y),$$

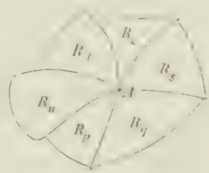
la somme Σ s'étendant à toutes les combinaisons des indices n et p correspondant à deux régions contiguës. La fonction $\Phi(x, y)$ admet comme *coupures* tous les chemins d'intégration l_{np}; elle est régulière en tout point non situé sur un de ces chemins.

Définition des fonctions $\varphi_n(x, y)$. Je considère la fonction $\varphi_n(x, y)$ qui à l'intérieur de R_n est égale à $\Phi(x, y)$; elle est régulière en tout point intérieur à cette région, puisque R_n ne renferme aucune des coupures

de $\Phi(x, y)$. La *continuation analytique* de $\varphi_n(x, y)$ est encore régulière en tout point A du périmètre de R_n intérieur à S. Soit en effet l_{np} la portion du périmètre de R_n à laquelle appartient le point A. Si A n'est pas une extrémité de l_{np}, la seule intégrale dont le chemin d'intégration passe par A est $I_{np}(x, y)$; il résulte du paragraphe 2 que la continuation analytique de $I_{np}(x, y)$ en tout point de l_{np} autre que ses extrémités, est régulière. Il en est donc de même pour $\varphi_n(x, y)$, qui, à l'intérieur de R_n, est donné par:

$$\varphi_n(x, y) = \Phi(x, y) = \Sigma I_{np}(x, y).$$

Si A est une extrémité de l_{np}, comme il est par hypothèse intérieur à S, c'est alors un *nœud;* soient $R_n, R_p, R_q, \ldots, R_s, R_t$ les régions que l'on traverse successivement en faisant le tour de A dans le sens direct; je partage la somme d'intégrales $\Phi(x,y)$ en deux parties; la première $\Phi_1(x,y)$ comprenant toutes les intégrales dont le chemin d'intégration a pour *extrémité* A; la seconde $\Phi_2(x, y)$ comprenant toutes les autres intégrales:



$$\Phi(x, y) = \Phi_1(x, y) + \Phi_2(x, y).$$

$\Phi_2(x, y)$ est régulière en A; la continuation analytique de $\Phi_1(x, y)$ est aussi régulière en A, d'après le paragraphe 3; car les fonctions:

$$f_p(x, y) - f_n(x, y),$$
$$f_q(x, y) - f_p(x, y),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$f_t(x, y) - f_s(x, y),$$
$$f_n(x, y) - f_t(x, y),$$

qui figurent dans les intégrales prises le long des chemins aboutissant en A, et qui sont toutes régulières en A, ont une somme identiquement nulle; par suite, $\Phi_1(x, y)$, considérée actuellement pour y intérieur à R_n, est, par continuation analytique, régulière en A; il en est de même de:

$$\varphi_n(x, y) = \Phi_1(x, y) + \Phi_2(x, y).$$

On a ainsi fait correspondre à chaque région R_n, une fonction $\varphi_n(x, y)$ définie et régulière à l'intérieur de R_n, et qui, *par continuation analytique sera considérée comme définie et sera régulière* en tout point, intérieur à S, du périmètre de R_n.

Relations entre deux fonctions $\varphi_n(x, y)$ *et* $\varphi_p(x, y)$ *correspondant à deux régions contiguës ou attenantes.* R_n et R_p étant deux régions contiguës et A étant un point de l_{np} autre que ses extrémités, les deux fonctions $\varphi_n(x, y)$ et $\varphi_p(x, y)$ et la différence $f_p(x, y) - f_n(x, y)$ sont régulières au point A, c'est-à-dire régulières à l'intérieur d'un petit cercle c de centre A; la ligne l_{np} partage le cercle c en deux parties: l'une c_n intérieure à R_n, l'autre c_p intérieure à R_p. On a, à l'intérieur de c_n:

$$\varphi_n(x, y) = \Phi(x, y);$$

pour avoir l'expression de $\varphi_n(x, y)$ à l'intérieur de c_p, je remarque que, lorsque le point y passe de c_n à c_p il traverse l_{np} dans le sens direct: par suite la continuation analytique de $I_{np}(x, y)$, lorsque y passe de c_n à c_p est:

$$I_{np}(x, y) + f_p(x, y) - f_n(x, y);$$

celle de $\Phi(x, y)$ sera donc, dans les mêmes hypothèses:

$$\Phi(x, y) + f_p(x, y) - f_n(x, y);$$

on a donc, à l'intérieur de c_p:

$$\varphi_n(x, y) = \Phi(x, y) + f_p(x, y) - f_n(x, y),$$

$$\varphi_p(x, y) = \Phi(x, y),$$

d'où:

$$(1) \qquad \varphi_n(x, y) - \varphi_p(x, y) = f_p(x, y) - f_n(x, y);$$

cette égalité démontrée ainsi pour y intérieur à c_p, subsiste à l'intérieur de tout le cercle c, puisque les deux membres sont des fonctions régulières dans c. La relation (1) est ainsi vérifiée en tout point A de l_{np} autre que ses extrémités; si une extrémité B de l_{np} est un nœud, la relation (1) subsistera encore dans le domaine de B; car les fonctions $\varphi_n(x, y)$, $\varphi_p(x, y)$, $f_p(x, y) - f_n(x, y)$, sont régulières en tout point de l_{np}, *y compris le point B*. Soient $R_n, R_p, R_q, \ldots, R_s, R_t$ les régions tra-

versées successivement lorsque l'on fait le tour de B dans le sens direct. On a dans le domaine de B, par l'application de la relation (1) aux groupes de régions contiguës R_n et R_p, R_p et R_q, ..., R_s et R_t, R_t et R_n:

$$\varphi_n(x, y) - \varphi_p(x, y) = f_p(x, y) - f_n(x, y),$$
$$\varphi_p(x, y) - \varphi_q(x, y) = f_q(x, y) - f_p(x, y),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\varphi_s(x, y) - \varphi_t(x, y) = f_t(x, y) - f_s(x, y),$$
$$\varphi_t(x, y) - \varphi_n(x, y) = f_n(x, y) - f_t(x, y);$$

si R_m et R_i désignent deux quelconques des régions attenantes au point B, contiguës ou non, on conclut des égalités précédentes par une combinaison simple:

$$\varphi_m(x, y) - \varphi_i(x, y) = f_i(x, y) - f_m(x, y). \tag{2}$$

Définition de $F(x, y)$. Je définis maintenant une fonction $F(x, y)$ pour x intérieur à Γ et y intérieur à S par la condition suivante: en tout point intérieur à R_n et dans le domaine de tout point de son périmètre intérieur à S, on a:

$$F(x, y) = \varphi_n(x, y) + f_n(x, y).$$

De là résulte que dans le domaine d'un point A intérieur à S et commun aux périmètres de plusieurs régions, on a plusieurs expressions différentes de $F(x, y)$: il faut montrer qu'elles sont identiques; en effet, si

$$\varphi_m(x, y) + f_m(x, y)$$

et

$$\varphi_i(x, y) + f_i(x, y)$$

sont deux de ces expressions, R_m et R_i sont contiguës ou attenantes au point A, et l'on a, dans les deux cas, dans le domaine de A, la relation:

$$\varphi_m(x, y) - \varphi_i(x, y) = f_i(x, y) - f_m(x, y)$$

ou:

$$\varphi_m(x, y) + f_m(x, y) = \varphi_i(x, y) + f_i(x, y).$$

La fonction $F(x, y)$ est donc définie d'une façon unique à l'intérieur de S; elle est équivalente en tout point intérieur à S à la fonction qui correspond à ce point; car si $f_n(x, y)$ est cette fonction, on a, par définition, dans le domaine du point considéré, la relation:

$$F(x, y) = f_n(x, y) + \varphi_n(x, y),$$

$\varphi_n(x, y)$ étant régulière au point considéré.

6. Le théorème qui vient d'être démontré relativement à des fonctions *monotropes et sans espace lacunaire,* peut être étendu à des fonctions non monotropes d'une nature particulière: je veux parler des fonctions qui sont les logarithmes de fonctions régulières.

La démonstration est analogue à la précédente; les notations que je n'explique pas à nouveau conserveront le même sens que dans le paragraphe précédent.

A chaque région R_n je fais correspondre une fonction $u_n(x, y)$ régulière pour x intérieur à Γ et pour y intérieur à $\mathfrak{R}_n$, et je pose:

$$f_n(x, y) = \log u_n(x, y).$$

$f_n(x, y)$ est une fonction dont la valeur n'est déterminée qu'à un multiple près de $2i\pi$; il n'y a pas lieu de chercher à distinguer entre ces différentes valeurs de la fonction puisqu'en général elles sont susceptibles de se permuter entre elles. Chacune d'elles est d'ailleurs une fonction régulière en tout point pour lequel $u_n(x, y)$ n'est pas nul.

Je supposerai que les fonctions $u_n(x, y)$ satisfont à la condition suivante: R_n et R_p étant deux régions contiguës quelconques, la fraction:

$$\frac{u_n(x, y)}{u_p(x, y)}$$

est supposée régulière et différente de o dans la portion d'aire commune à $\mathfrak{R}_n$ et $\mathfrak{R}_p$. Il en résulte que la différence:

$$f_n(x, y) - f_p(x, y)$$

est régulière dans la portion d'aire commune à $\mathfrak{R}_n$ et $\mathfrak{R}_p$; cette fonction n'est définie qu'à un multiple près de $2i\pi$, mais chacune de ses déterminations est régulière dans la portion d'aire considérée.

Je vais démontrer le théorème suivant:

Il existe une fonction $F(x, y)$ définie à l'intérieur de S à un multiple près de $2i\pi$ et telle que, en tout point intérieur à S, $F(x, y)$ est équivalente à la fonction $f(x, y)$ correspondant à ce point.

Je pose comme précédemment:

$$I_{np}(x, y) = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{l_{np}} \frac{f_p(x, z) - f_n(x, z)}{z - y} dz;$$

on prendra pour $f_p(x, z) - f_n(x, z)$, qui est une fonction régulière en tout point de l_{np}, l'une quelconque, prise à volonté, de ses déterminations.

Soit encore, comme précédemment:

$$\Phi(x, y) = \Sigma I_{np}(x, y).$$

Voici la particularité par laquelle la démonstration actuelle va différer de la précédente; si je pose, pour y intérieur à R_n:

$$\varphi_n(x, y) = \Phi(x, y)$$

et si B est un nœud appartenant au périmètre de R_n, on n'est pas certain que la continuation analytique de $\varphi_n(x, y)$ soit régulière au point B; décomposons, en effet, $\Phi(x, y)$ en deux parties: l'une $\Phi_1(x, y)$ comprenant la somme des intégrales dont les chemins d'intégration aboutissent au point B; l'autre $\Phi_2(x, y)$ comprenant la somme de toutes les autres intégrales:

$$\Phi(x, y) = \Phi_1(x, y) + \Phi_2(x, y).$$

$\Phi(x, y)$ est régulière au point B; mais la continuation analytique de $\Phi_1(x, y)$ n'est pas nécessairement régulière en B; car si, comme précédemment,

$$f_p(x, z) - f_n(x, z),$$
$$f_q(x, z) - f_p(x, z),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_t(x, z) - f_s(x, z),$$
$$f_n(x, z) - f_t(x, z),$$

sont les fonctions qui figurent dans les intégrales dont les chemins d'intégration ont pour *extrémité* B, par suite des déterminations multiples parmi lesquelles chacune d'elles est choisie, on n'est pas assuré que leur somme est nulle identiquement dans le domaine de B; tout ce que l'on sait, c'est que cette somme est un multiple de $2i\pi$, soit: $2iK\pi$. Dès lors si b est la valeur de z qui correspond au point B, la continuation analytique de:

$$\Phi_1(x, y) - \log(b - y)^K$$

est, d'après le paragraphe 4, régulière au point B; il en sera de même de la continuation analytique de:

$$\Phi(x, y) - \log(b - y)^K.$$

Definition de $\Psi(x, y)$. Cela conduit à poser:

$$\Psi(x, y) = \Phi(x, y) - \Sigma \log(b - y)^K$$

la somme Σ s'étendant à tous les termes analogues à $\log(b - y)^K$ correspondant aux différents nœuds. Il est à remarquer que $\Psi(x, y)$ n'est définie qu'à un multiple près de $2i\pi$ comme chacun des termes $\log(b - y)^K$.

Définition de $\psi_n(x, y)$. Je définis la fonction $\psi_n(x, y)$ à l'intérieur de R_n par la condition:

$$\psi_n(x, y) = \Psi(x, y);$$

cette fonction est régulière à l'intérieur de R_n: sa continuation analytique est régulière en tout point A du périmètre de R_n, intérieur à S; si en effet A est un point quelconque de l_{np}, autre que ses extrémités, le seul terme de la somme $\Psi(x, y)$ pour lequel A soit un point singulier est $I_{np}(x, y)$ dont la continuation analytique est régulière au point A. Si, en second lieu, A est un nœud, je partage $\Psi(x, y)$ en trois parties; la première $\Psi_1(x, y)$ renferme la somme des intégrales correspondant aux chemins qui aboutissent en A; la deuxième est le terme $-\log(a - y)^\alpha$ qui correspond à A; la troisième $\Psi_2(x, y)$ renferme tous les autres termes de $\Psi(x, y)$:

$$\Psi(x, y) = \Psi_1(x, y) - \log(a - y)^\alpha + \Psi_2(x, y).$$

$\Psi_2(x, y)$ est régulière en A, et la continuation analytique de

$$\Psi_1(x, y) - \log(a - y)^\alpha,$$

(considérée actuellement pour y intérieur à R_n) est régulière en A, d'après ce qui précède.

Ainsi à chaque région R_n on peut faire correspondre une fonction $\psi_n(x, y)$ régulière en tout point de R_n et en tout point de son périmètre intérieur à S, définie à l'intérieur de R_n par la condition d'être égale à $\Psi(x, y)$ et sur son périmètre par continuation analytique.

Relations entre les fonctions $\psi_m(x, y)$ *et* $\psi_i(x, y)$ *correspondant à deux régions contiguës ou attenantes.* On verra comme dans la démonstration précédente que dans le domaine d'un point intérieur à S appartenant aux périmètres de deux régions R_m et R_i contiguës ou attenantes, on a:

$$\psi_m(x, y) - \psi_i(x, y) = f_i(x, y) - f_m(x, y);$$

toutefois cette égalité n'a lieu qu'à un multiple près de $2i\pi$, lequel dépend des déterminations choisies pour les fonctions qui y figurent.

Définition de $F(x, y)$. Je définis $F(x, y)$ pour y intérieur à S par la condition que l'on ait à l'intérieur de R_n et dans le domaine de tout point de son périmètre intérieur à S:

$$F(x, y) = \psi_n(x, y) + f_n(x, y).$$

$F(x, y)$ n'est ainsi définie qu'à un multiple près de $2i\pi$.

On a ainsi défini une fonction unique, puisqu'en un point intérieur à S et appartenant aux périmètres de R_m et R_i, on a, à un multiple près de $2i\pi$:

$$\psi_m(x, y) - \psi_i(x, y) = f_i(x, y) - f_m(x, y)$$

ou:

$$\psi_m(x, y) + f_m(x, y) = \psi_i(x, y) + f_i(x, y).$$

En un point quelconque intérieur à S, $F(x, y)$ est équivalente à la fonction $f_p(x, y)$ qui correspond à ce point, puisque l'on a dans le domaine de ce point:

$$F(x, y) = \psi_p(x, y) + f_p(x, y),$$

$\psi_p(x, y)$ étant régulière au point considéré.

Le théorème énoncé est ainsi démontré et l'on en déduit le suivant:

7. *Il existe une fonction* $U(x, y)$ *régulière en tout point* (x, y) *inté-*

rieur à (Γ, S) et telle que en un point quelconque intérieur à S son quotient par la fonction $u_p(x, y)$ qui correspond à ce point est régulier et différent de o au point considéré.

Je pose en effet:

$$U(x, y) = e^{F(x,y)}.$$

$U(x, y)$ est définie, à l'intérieur de S, sans aucune ambiguïté, car le multiple de $2i\pi$ que l'on peut ajouter à volonté à $F(x, y)$ n'altère pas la valeur de $e^{F(x,y)}$; de plus, en un point quelconque intérieur à S, on a en choisissant convenablement l'indice p:

$$F(x, y) = \psi_p(x, y) + f_p(x, y)$$

on en déduit, en se souvenant que $f_p(x, y) = \log u_p(x, y)$

$$e^{F(x,y)} = u_p(x, y) e^{\psi_p(x,y)},$$

ce qui montre que $U(x, y)$ est régulière au point considéré, c'est-à-dire en tout point intérieur à S.

On peut écrire cette égalité de la façon suivante:

$$\frac{U(x, y)}{u_p(x, y)} = e^{\psi_p(x,y)}$$

d'où l'on conclut qu'en tout point intérieur à S le quotient de $U(x, y)$ par la fonction $u_p(x, y)$ qui correspond à ce point est régulier et différent de o.

III.

Extension aux fonctions de n variables complexes des théorèmes de MM. Mittag-Leffler et Weierstrass. Théorème de M. Poincaré.

8. Voici quelques considérations générales sur le problème qui fait l'objet de cette troisième partie et de la quatrième.

Soit $F(x, y, \ldots, z, t, u)$ une fonction de n variables complexes $x, y, \ldots, z, t, u$, monotrope et sans espace lacunaire à l'intérieur d'une région S. Je suppose que pour chaque point $(a, b, \ldots, c, d, e)$ intérieur à S, on connaisse une fonction $f_{a,b,\ldots,c,d,e}(x, y, \ldots, z, t, u)$ monotrope et sans espace lacunaire, définie à l'intérieur d'un cercle $\Gamma_{a,b,\ldots,c,d,e}$, intérieur à S, et ayant pour centre le point $(a, b, \ldots, c, d, e)$, et équivalente à $F(x, y, \ldots, z, t, u)$ à l'intèrieur de $\Gamma_{a,b,\ldots,c,d,e}$.

Une condition nécessaire à laquelle doivent satisfaire les fonctions $f_{a,b,\ldots,c,d,e}(x, y, \ldots, z, t, u)$ correspondant aux différents points de S, est la suivante: si $(a', b', \ldots, c', d', e')$ est un point assez voisin de $(a, b, \ldots, c, d, e)$ pour être intérieur au cercle $\Gamma_{a,b,\ldots,c,d,e}$, les deux fonctions

$$f_{a,b,\ldots,c,d,e}(x, y, \ldots, z, t, u) \quad \text{et} \quad f_{a',b',\ldots,c',d',e'}(x, y, \ldots, z, t, u)$$

doivent être équivalentes au point $(a', b', \ldots, c', d', e')$; il faut en effet qu'en ce point les deux fonctions soient équivalentes à une même troisième $F(x, y, \ldots, z, t, u)$.

Je me propose de montrer que si, sans se donner la fonction $F(x, y, \ldots, z, t, u)$, on se donne pour chaque point $(a, b, \ldots, c, d, e)$ intérieur à S, une fonction $f_{a,b,\ldots,c,d,e}(x, y, \ldots, z, t, u)$ monotrope et sans espace lacunaire à l'intérieur de $\Gamma_{a,b,\ldots,c,d,e}$, et si les fonctions données $f_{a,b,\ldots,c,d,e}(x, y, \ldots, z, t, u)$ satisfont à la condition qui vient d'être expliquée, il existe une fonction $F(x, y, \ldots, z, t, u)$ monotrope et sans espace lacunaire, définie à l'intérieur de S, et qui, en chaque point intérieur à S est équivalente à la fonction donnée correspondant à ce point.

J'aurai ainsi établi la condition nécessaire et suffisante à laquelle doivent satisfaire les fonctions données, pour qu'il existe une fonction $F(x, y, \ldots, z, t, u)$ définie à l'intérieur de S, et équivalente en chaque point intérieur à S à la fonction donnée en ce point.

Il est clair que le théorème bien connu de M. Mittag-Leffler, relatif aux fonctions d'une variable complexe, n'est qu'un cas particulier de celui que je viens d'énoncer.

De cette extension du théorème de M. Mittag-Leffler se déduira d'une façon immédiate le théorème de M. Poincaré.

Les énoncés des théorèmes qui suivent et leurs démonstrations vont préciser ce qu'il peut rester de vague dans ces considérations générales.

9. Il importe, pour la suite, de préciser ce que j'entends par point intérieur à une aire S_1 prise sur le plan d'une variable complexe: un point est intérieur à S_1 s'il existe un cercle, intérieur à S_1, ayant ce point pour centre et un rayon non nul. Cette définition exclut les points situés sur le périmètre de S_1; une aire s_1 sera dite *complètement intérieure à* S_1 si chaque point de s_1 et de son périmètre est intérieur à S_1; les périmètres des aires S_1 et s_1 ne peuvent pas avoir, d'après cela, de point commun.

10. Lemme. *Soit, sur le plan YOX, une aire connexe S limitée par un contour fermé simple ou complexe; on suppose qu'à chaque point de S ou de son périmètre correspond un cercle, de rayon non nul, ayant ce point pour centre: il est alors toujours possible de subdiviser S en régions, en nombre fini et assez petites pour que chacune d'elles soit complètement intérieure au cercle correspondant à un point convenablement choisi dans S ou sur son périmètre.*

Supposons, en effet, le lemme en défaut: partageons S en carrés au moyen de parallèles aux axes de coordonnées, de façon que le nombre des régions obtenues soit au moins égal à un certain entier n; il y a au moins l'une de ces régions, S_1, pour laquelle le lemme est encore en défaut.

Subdivisant S_1 en carrés et portions de carrés en nombre au moins égal à n, j'en déduis S_2, de la même façon que S_1 se déduit de S; en poursuivant le raisonnement, j'arrive à une suite indéfinie de carrés ou portions de carrés $S_1, S_2, \ldots, S_p, \ldots$; il est clair que S_p, pour p augmentant indéfiniment, a pour limite un point M intérieur à S ou sur son périmètre; on arrive à cette conclusion que l'on peut trouver un carré S_p aussi petit que l'on veut entourant M ou attenant à M et qui ne soit pas contenu à l'intérieur d'un des cercles de l'énoncé; or cela est impossible puisqu'au point M correspond un cercle de rayon non nul ayant ce point pour centre.

11. Dans les deux théorèmes qui suivent, je désigne par a avec ou sans indice une valeur attribuée à la variable complexe x, par b avec ou sans indice une valeur attribuée à la variable complexe y.

J'ai rapproché les énoncés de ces deux théorèmes parce que les démonstrations, à une légère différence près, en sont identiques.

Théorème I. *Soient S_1 et S_2 deux aires connexes prises sur les plans respectifs des deux variables x et y; soient s_1 et s_2 deux aires connexes à contour fermé simple ou complexe, complètement intérieures respectivement à S_1 et S_2.*

On suppose qu'à tout point (a, b) intérieur à (S_1, S_2) correspondent:

1° *deux cercles: $\Gamma_{a,b}$ de centre a et $\gamma_{a,b}$ de centre b, intérieurs respectivement à S_1 et S_2.*

2° *une fonction $f_{a,b}(x, y)$ monotrope et sans espace lacunaire définie à l'intérieur de $(\Gamma_{a,b}, \gamma_{a,b})$ et telle que en tout point (a', b') intérieure à $(\Gamma_{a,b}, \gamma_{a,b})$ elle soit équivalente à la fonction $f_{a',b'}(x, y)$ qui correspond à ce point.*

Il existe une fonction $F(x, y)$ monotrope et sans espace lacunaire définie à l'intérieure de (s_1, s_2) et qui en tout point intérieur à (s_1, s_2) est équivalente à la fonction qui correspond à ce point.

Théorème II. *Au lieu de supposer chacune des fonctions $f_{a,b}(x, y)$ de l'énoncé précédent monotrope et sans espace lacunaire à l'intérieur de $(\Gamma_{a,b}, \gamma_{a,b})$ on peut supposer que chacune d'elles est le logarithme d'une fonction $v_{a,b}(x, y)$ régulière à l'intérieur de $(\Gamma_{a,b}, \gamma_{a,b})$ et telle qu'en tout point (a', b') intérieur à $(\Gamma_{a,b}, \gamma_{a,b})$ elle soit équivalente à $f_{a',b'}(x, y)$; cela revient à supposer que le quotient $\frac{v_{a,b}(x, y)}{v_{a',b'}(x, y)}$ est régulier et différent de 0 au point a', b'.*

Il existe alors une fonction $F(x, y)$ définie à un multiple près de $2i\pi$ à l'intérieur de (s_1, s_2) et équivalente en tout point intérieur à (s_1, s_2) à la fonction qui correspond à ce point.

Démonstration du théorème I. Soit, en effet, a un point intérieur à S_1: si au point a j'adjoins le point b intérieur à s_2 ou sur son périmètre, il correspond au point b d'après l'énoncé un cercle $\gamma_{a,b}$ intérieur à S_2, de centre b: d'après le lemme, il est alors possible de subdiviser s_2 en régions $R_1, R_2, \ldots, R_n$ en nombre fini n et assez petites pour que chacune d'elles R_p soit complètement intérieure au cercle γ_{a,b_p} de centre b_p convenablement choisi dans s_2 ou sur son périmètre; à chaque point b_p correspond de plus un cercle Γ_{a,b_p} de centre a et intérieur à S_1; ces cercles Γ_{a,b_p} sont en nombre fini n comme les points $b_1, b_2, \ldots, b_n$; je

puis alors tracer un cercle Γ_a^1 de centre a et intérieur à tous les cercles concentriques Γ_{a,b_p}; Γ_a^1 sera nécessairement intérieur à S_1. A chaque région R_p, contenue à l'intérieur de γ_{a,b_p} correspond une fonction de l'énoncé $f_{a,b_p}(x, y)$ définie à l'intérieur de $(\Gamma_{a,b_p}, \gamma_{a,b_p})$ et à fortiori à l'intérieur de $(\Gamma_a^1, \gamma_{a,b_p})$; de plus, si R_p et R_q sont deux régions contiguës en tout point (a', b') intérieur à $(\Gamma_a^1, \gamma_{a,b_p})$ et à $(\Gamma_a^1, \gamma_{a,b_q})$ les deux fonctions $f_{a,b_p}(x, y)$ et $f_{a,b_q}(x, y)$ sont équivalentes comme étant, par hypothèse, équivalentes en ce point à $f_{a',b'}(x, y)$. Dès lors les n régions $R_1, R_2, \ldots, R_n$, et les n fonctions qui leur correspondent, $f_{a,b_1}(x, y), \ldots, f_{a,b_n}(x, y)$ satisfont à toutes les conditions sous lesquelles le théorème fondamental est applicable. Il existe, d'après ce théorème, une fonction $\varphi_a(x, y)$ monotrope et sans espace lacunaire, définie à l'intérieur de (Γ_a^1, s_2) et équivalente, en tout point (a'', b'') intérieur à la région où elle est définie, à la fonction $f_{a,b_p}(x, y)$, l'indice p étant convenablement choisi; mais au point (a'', b''), $f_{a,b_p}(x, y)$ est elle-même équivalente à $f_{a'',b''}(x, y)$; par suite $\varphi_a(x, y)$ et $f_{a'',b''}(x, y)$ sont équivalentes au point (a'', b'').

Ainsi, à chaque point a intérieur à S_1, correspondent: un cercle Γ_a^1, intérieur à S_1, de centre a, et une fonction $\varphi_a(x, y)$ définie à l'intérieur de (Γ_a^1, s_2) et qui, en tout point où elle est définie, est équivalente à la fonction correspondant à ce point d'après l'énoncé.

On peut, d'après le lemme, partager s_1 en régions $T_1, T_2, \ldots, T_m$, en nombre fini m et assez petites pour que chacune d'elles T_p soit comprise à l'intérieur du cercle $\Gamma_{a_p}^1$ de centre a_p convenablement choisi à l'intérieur de s_1 ou sur son périmètre; à chacune des régions T_p, contenue à l'intérieur de $\Gamma_{a_p}^1$, correspond une fonction $\varphi_{a_p}(x, y)$ définie à l'intérieur de $(\Gamma_{a_p}^1, s_2)$; si T_p et T_q sont deux régions contiguës les deux fonctions $\varphi_{a_p}(x, y)$ et $\varphi_{a_q}(x, y)$ sont équivalentes en tout point intérieur à la fois à $(\Gamma_{a_p}^1, s_2)$ et à $(\Gamma_{a_q}^1, s_2)$, comme étant toutes les deux équivalentes en ce point à la fonction de l'énoncé qui lui correspond. Dès lors, on peut appliquer le théorème fondamental aux fonctions $\varphi_{a_p}(x, y)$ et l'on est conduit à la fonction $F(x, y)$ définie à l'intérieur de (s_1, s_2) qui satisfait aux conditions de l'énoncé; car en tout point (a''', b''') intérieur à (s_1, s_2), $F(x, y)$ est équivalente à la fonction $\varphi_{a_p}(x, y)$, l'indice p étant convenablement choisi, et $\varphi_{a_p}(x, y)$ est équivalente elle-même en ce point à $f_{a''',b'''}(x, y)$.

Démonstration du théorème II. Cette démonstration est analogue à

la précédente: la seule différence consiste en ce que les fonctions $f_{a,b}(x, y)$, $\varphi_a(x, y)$ et $F(x, y)$ ne sont définies qu'à un multiple près de $2i\pi$.

12. Conséquence du théorème II. Dans le cas du théorème II, si l'on considère la fonction:

$$V(x, y) = e^{F(x,y)},$$

elle est définie sans ambiguïté à l'intérieur de (s_1, s_2); de plus si (a, b) est un point quelconque intérieur à (s_1, s_2), on a en ce point:

$$F(x, y) = f_{a,b}(x, y) + \lambda(x, y),$$

$\lambda(x, y)$ étant régulière au point (a, b); on en conclut, en se souvenant que:

$$f_{a,b}(x, y) = \log v_{a,b}(x, y),$$

(1) $$V(x, y) = v_{a,b}(x, y)e^{\lambda(x,y)}$$

ou:

(2) $$\frac{V(x, y)}{v_{a,b}(x, y)} = e^{\lambda(x,y)}.$$

L'égalité (1) montre que $V(x, y)$ est régulière en tout point (a, b) intérieur à (s_1, s_2); l'égalité (2) montre que le quotient $\frac{V(x, y)}{v_{a,b}(x, y)}$ est régulier et différent de 0 au point (a, b).

D'où le théorème suivant: (S_1, S_2, s_1, s_2 conservent la même signification que dans ce qui précède).

Théorème III. *Si à chaque point (a, b) intérieur à (S_1, S_2) correspondent:*

1° *deux cercles $\Gamma_{a,b}$ de centre a et $\gamma_{a,b}$ de centre b, respectivement intérieurs à S_1 et S_2.*

2° *une fonction $V_{a,b}(x, y)$ régulière à l'intérieur de $(\Gamma_{a,b}, \gamma_{a,b})$ et telle qu'en tout point (a', b') intérieur à $(\Gamma_{a,b}, \gamma_{a,b})$ le quotient $\frac{v_{a,b}(x, y)}{v_{a',b'}(x, y)}$ soit régulier et différent de 0;*

il existe une fonction $V(x, y)$ régulière à l'intérieur de (s_1, s_2) et telle qu'en tout point (a, b) intérieur à (s_1, s_2) le quotient de $V(x, y)$ par la fonction $v_{a,b}(x, y)$ qui correspond à ce point est régulier et différent de 0.

13. L'extension des théorèmes précédents va être donnée pour le cas de n variables: le procédé de démonstration reste le même; il me suffira donc d'indiquer les traits généraux de la démonstration.

Les n variables sont désignées par $x, \ldots, y, z, t, u$; $a, \ldots, b, c, d, e$, avec ou sans indices, représentent des valeurs attribuées respectivement à $x, \ldots, y, z, t, u$. J'appelle *point* un ensemble de valeurs attribuées aux n variables ou *à une partie* des n variables; j'appelle cercle, ayant pour centre un point donné, un ensemble de cercles ayant pour centres respectifs les différents éléments composant le point et tracés sur les plans des variables correspondantes; dans ce système de notations un cercle Γ de centre $(a, \ldots, b, c, d, e)$ peut être considéré comme composé de deux cercles: Γ' ayant pour centre $(a, \ldots, b, c, d)$ et Γ'' ayant pour centre e; ou comme composé de Γ_1 ayant pour centre $(a, \ldots, b, c)$ et de Γ_2 ayant pour centre (d, e); etc.

Un cercle Γ est concentrique et intérieur au cercle γ, si Γ est composé de cercles, au sens ordinaire du mot, concentriques et intérieurs à ceux qui composent γ.

Théorème IV. *Soient $s_1, s_2, \ldots, s_n$, n aires connexes à contour fermé, simple ou complexe, prises sur les plans respectifs des n variables $x, \ldots, y, z, t, u$ et complètement intérieures respectivement aux aires $S_1, S_2, \ldots, S_n$ prises sur les mêmes plans.*

On suppose qu'à tout point $(a, \ldots, b, c, d, e)$ intérieur à $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$, correspondent:

1° *un cercle $\Gamma_{a,\ldots,b,c,d,e}$ de centre $(a, \ldots, b, c, d, e)$ et intérieur à $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$;*

2° *une fonction des n variables, $f_{a,\ldots,b,c,d,e}(x, \ldots, y, z, t, u)$ monotrope et sans espace lacunaire, définie à l'intérieur de $\Gamma_{a,\ldots,b,c,d,e}$ et telle que si $(a', \ldots, b', c', d', e')$ est un point intérieur à $\Gamma_{a,\ldots,b,c,d,e}$ les deux fonctions $f_{a,\ldots,b,c,d,e}(x, \ldots, y, z, t, u)$ et $f_{a',\ldots,b',c',d',e'}(x, \ldots, y, z, t, u)$ soient équivalentes au point $(a', \ldots, b', c', d', e')$.*

Il existe une fonction $F(x, \ldots, y, z, t, u)$, monotrope et sans espace lacunaire, définie à l'intérieur de $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ et telle qu'en tout point $(a, \ldots, b, c, d, e)$ intérieur à $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, elle soit équivalente à la fonction $f_{a,\ldots,b,c,d,e}(x, \ldots, y, z, t, u)$ qui correspond à ce point.

Théorème V. *Au lieu de supposer, comme dans l'énoncé précédent,*

chacune des fonctions $f_{a,\ldots,b,c,d,e}(x,\ldots,y,z,t,u)$ *monotrope et sans espace lacunaire à l'intérieur de* $\Gamma_{a,\ldots,b,c,d,e}$, *on peut supposer que chacune de ces fonctions est le logarithme d'une fonction* $v_{a,\ldots,b,c,d,e}(x,\ldots,y,z,t,u)$ *régulière à l'intérieur de* $\Gamma_{a,\ldots,b,c,d,e}$ *et telle que si* $(a',\ldots,b',c',d',e')$ *est un point intérieur à* $\Gamma_{a,\ldots,b,c,d,e}$, *les deux fonctions* $f_{a,\ldots,b,c,d,e}(x,\ldots,y,z,t,u)$ *et* $f_{a',\ldots,b',c',d',e'}(x,\ldots,y,z,t,u)$ *soient équivalentes au point* $(a',\ldots,b',c',d',e')$; *cette dernière condition revient à supposer que le quotient*

$$\frac{v_{a,\ldots,b,c,d,e}(x,\ldots,y,z,t,u)}{v_{a',\ldots,b',c',d',e'}(x,\ldots,y,z,t,u)}$$

est régulier et différent de o *au point* $(a',\ldots,b',c',d',e')$.

Il existe alors une fonction $F(x,\ldots,y,z,t,u)$ *définie à un multiple près de* $2i\pi$ *à l'intérieur de* $(s_1,s_2,\ldots,s_n)$ *et qui en chaque point* $(a,\ldots,b,c,d,e)$ *intérieur à* $(s_1,s_2,\ldots,s_n)$ *est équivalente à la fonction* $f_{a,\ldots,b,c,d,e}(x,\ldots,y,z,t,u)$ *correspondant à ce point.*

Démonstration du théorème IV. Soit, en effet, $(a,\ldots,b,c,d)$ un point intérieur à $(S_1,S_2,\ldots,S_{n-1})$; si je lui adjoins le point e intérieur à S_n, il correspond à e un cercle $\Gamma_{a,\ldots,b,c,d,e}$ que je considère comme composé de $\Gamma^1_{a,\ldots,b,c,d,e}$ de centre $(a,\ldots,b,c,d)$ et de $\gamma^1_{a,\ldots,b,c,d,e}$ de centre e; on peut alors décomposer s_n en régions $R_1,R_2,\ldots,R_m$, en nombre fini m, assez petites pour que chacune d'elles R_p soit intérieur au cercle $\gamma^1_{a,\ldots,b,c,d,e_p}$ de centre e_p convenablement choisi dans S_n. Les m cercles $\Gamma^1_{a,\ldots,b,c,d,e_p}$ étant concentriques et en nombre fini m, il existe un cercle $\Gamma^2_{a,\ldots,b,c,d}$ concentrique et intérieur à ces m cercles. $\Gamma^2_{a,\ldots,b,c,d}$ est certainement intérieur à $(S_1,S_2,\ldots,S_{n-1})$. A chaque région R_p correspond une fonction $f_{a,\ldots,b,c,d,e_p}(x,\ldots,y,z,t,u)$ définie à l'intérieur de $(\Gamma^1_{a,\ldots,b,c,d,e_p},\gamma^1_{a,\ldots,b,c,d,e_p})$ et à fortiori à l'intérieur de $(\Gamma^2_{a,\ldots,b,c,d},\gamma^1_{a,\ldots,b,c,d,e_p})$; de plus si R_p et R_q sont deux régions contiguës, en tout point $(a',\ldots,b',c',d',e')$ intérieur à la fois à $(\Gamma^2_{a,\ldots,b,c,d},\gamma^1_{a,\ldots,b,c,d,e_p})$ et à $(\Gamma^2_{a,\ldots,b,c,d},\gamma^1_{a,\ldots,b,c,d,e_q})$ les deux fonctions $f_{a,\ldots,b,c,d,e_p}(x,\ldots,y,z,t,u)$ et $f_{a,\ldots,b,c,d,e_q}(x,\ldots,y,z,t,u)$ sont équivalentes.

Il en résulte la possibilité d'appliquer le théorème fondamental aux m fonctions $f_{a,\ldots,b,c,d,e_p}(x,\ldots,y,z,t,u)$ et l'on est conduit à une fonction $\varphi_{a,\ldots,b,c,d}(x,\ldots,y,z,t,u)$ définie à l'intérieur de $(\Gamma^2_{a,\ldots,b,c,d},s_n)$ et telle qu'en tout point $(a'',\ldots,b'',c'',d'',e'')$ intérieur à la région où elle est définie, elle est équivalente à $f_{a,\ldots,b,c,d,e_p}(x,\ldots,y,z,t,u)$, l'indice p étant convenable-

ment choisi, et par suite équivalente à la fonction $f_{a''\dots b''c''d''e''}(x,\dots,y,z,t,u)$ correspondant d'après l'énoncé au point $(a'',\dots,b'',c'',d'',e'')$.

Ainsi à chaque point $(a,\dots,b,c,d)$ intérieur à $(S_1, S_2, \dots, S_{n-1})$ correspondent: un cercle $\Gamma^2_{a,\dots,b,c,d,}$, ayant ce point pour centre et intérieur à $(S_1, S_2, \dots, S_{n-1})$ et une fonction $\varphi_{a,\dots,b,c,d}(x,\dots,y,z,t,u)$ définie à l'intérieur de $(\Gamma^2_{a,\dots,b,c,d}, s_n)$, équivalente en tout point où elle est définie à la fonction de l'énoncé qui correspond à ce point. Je considère $\Gamma^2_{a,\dots,b,c,d}$ comme composé de deux cercles: l'un $\Gamma^3_{a,\dots,b,c,d}$ de centre $(a,\dots,b,c)$ et l'autre $\gamma^3_{a,\dots,b,c,d}$ de centre d. On peut décomposer s_{n-1} en régions T_1, $T_2,\dots,T_{m'}$, en nombre fini m', assez petites pour que chacune d'elles T_p soit intérieur au cercle $\gamma^3_{a,\dots,b,c,d_p}$ de centre d_p convenablement choisi dans s_{n-1} ou sur son périmètre; je trace le cercle $\Gamma^4_{a,\dots,b,c}$ de centre $(a,\dots,b,c)$ et intérieur aux m' cercles concentriques $\Gamma^3_{a,\dots,b,c,d_p}$; $\Gamma^4_{a,\dots,b,c}$ est forcément intérieur à $(S_1, S_2, \dots, S_{n-2})$; à chaque région T_p correspond une fonction $\varphi_{a,\dots,b,c,d_p}$ définie à l'intérieur de $(\Gamma^3_{a,\dots,b,c,d_p}, \gamma^3_{a,\dots,b,c,d_p}, s_n)$ et à fortiori à l'intérieur de $(\Gamma^4_{a,\dots,b,c}, \gamma^4_{a,\dots,b,c,d_p}, s_n)$; le théorème fondamental, appliqué à ces fonctions, conduit à la fonction $\psi_{a,\dots,b,c}(x,\dots,y,z,t,u)$ définie à l'intérieur de $(\Gamma^4_{a,\dots,b,c}, s_{n-1}, s_n)$ équivalente en chaque point où elle est définie à la fonction $\varphi_{a,\dots,b,c,d_p}(x,\dots,y,z,t,u)$, l'indice p étant convenablement choisi, et équivalente aussi par suite à la fonction de l'énoncé correspondant au point considéré.

Des fonctions $\psi_{a,\dots,b,c}(x,\dots,y,z,t,u)$, on conclura de la même façon, en décomposant $\Gamma^4_{a,\dots,b,c}$, en deux cercles $\Gamma^5_{a,\dots,b,c}$ de centre $(a,\dots,b)$ et $\gamma^5_{a,\dots,b,c}$ de centre c, l'existence d'une fonction $\chi_{a,\dots,b}(x,\dots,y,z,t,u)$ définie à l'intérieur de $(\Gamma^6_{a,\dots,b}, s_{n-2}, s_{n-1}, s_n)$; ($\Gamma^6_{a,\dots,b}$ désignant un cercle intérieur à $(S_1,\dots,S_{n-3})$ de centre $(a\dots b)$, de rayon choisi assez petit) et telle qu'en tout point où elle est définie, elle soit équivalente à la fonction de l'énoncé correspondant à ce point. En poursuivant ce raisonnement on parvient à une fonction $F(x,\dots,y,z,t,u)$ définie à l'intérieur de $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ et qui en chaque point où elle est ainsi définie, est équivalente à la fonction de l'énoncé correspondant à ce point.

Démonstration du théorème V. Elle est analogue à la précédente: la seule différence consiste en ce que les fonctions $f(x,\dots,y,z,t,u)$, $\varphi(x,\dots,y,z,t,u)$, $\psi(x,\dots,y,z,t,u)$ et $F(x,\dots,y,z,t,u)$ ne sont considérées comme définies qu'à un multiple près de $2i\pi$.

14. Dans le cas du théorème V, en posant:

$$V(x, \ldots, y, z, t, u) = e^{F(x, \ldots, y, z, t, u)}$$

on obtient, comme dans le cas de deux variables, le théorème suivant où $S_1, S_2, \ldots, S_n$ et $s_1, s_2, \ldots, s_n$, conservent la même signification.

Théorème VI. *Si à tout point $(a, \ldots, b, c, d, e)$ intérieur à $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$ correspondent:*

1° *un cercle $\Gamma_{a,\ldots,b,c,d,e}$ de centre $(a, \ldots, b, c, d, e)$ et intérieur à $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$;*

2° *une fonction $v_{a,\ldots,b,c,d,e}(x, \ldots, y, z, t, u)$ des n variables, régulière à l'intérieur de $\Gamma_{a,\ldots,b,c,d,e}$ et telle que si $(a', \ldots, b', c', d', e')$ est un point intérieur à $\Gamma_{a,\ldots,b,c,d,e}$ le quotient $\dfrac{v_{a,\ldots,b,c,d,e}(x, \ldots, y, z, t, u)}{v_{a',\ldots,b',c',d',e'}(x, \ldots, y, z, t, u)}$ soit régulier et différent de o en ce point;*

Il existe une fonction $V(x, \ldots, y, z, t, u)$ régulière en tout point intérieur à $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ et telle qu'en tout point $(a, \ldots, b, c, d, e)$ intérieur à $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ son quotient par la fonction $v_{a,\ldots,b,c,d,e}(x, \ldots, y, z, t, u)$ est régulier et différent de o.

15. Ce dernier théorème conduit à un théorème important relatif à une fonction $\Phi(x, \ldots, y, z, t, u)$ des n variables $(x, \ldots, y, z, t, u)$ n'admettant à l'intérieur de $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$ que des singularités non essentielles.

Avant d'aborder ce théorème il est utile de rappeler quelques propositions connues.

M. Weierstrass a démontré que si une série entière en $x, \ldots, y, z, t, u$, $\sigma(x, \ldots, y, z, t, u)$, convergente dans le voisinage de l'origine, s'annule à l'origine, on peut l'écrire dans un domaine ∂ de l'origine (sauf un cas d'exception que l'on peut éviter par un changement linéaire de variables) sous la forme:

$$\sigma(x, \ldots, y, z, t, u) = P(u)\sigma_1(x, \ldots, y, z, t, u)$$

où $P(u)$ est un polynôme en u de degré m, dans lequel le coefficient de u^m est l'unité, les autres coefficients étant des séries entières en $x, \ldots, y, z, t$, convergentes dans ∂, et s'annulant toutes à l'origine, et où σ_1 est une série entière en $x, \ldots, y, z, t, u$ convergente dans ∂ et ne s'annulant pas dans ∂.

De là résulte que les zéros de $\sigma(x, \ldots, y, z, t, u)$ forment dans le voisinage de l'origine une multiplicité à $2(n-1)$ paramètres réels.

Si $\sigma(x, \ldots. y, z, t, u)$ et $\sigma'(x, \ldots, y, z, t, u)$ sont deux séries entières en $x, \ldots, y, z, t, u$ s'annulant à l'origine, deux cas peuvent se présenter: ou bien ces deux séries admettent un diviseur commun (au sens donné à ce mot par M. Weierstrass); leurs zéros communs forment alors, dans le voisinage de l'origine, une multiplicité à $2(n-1)$ paramètres réels; ou bien il n'y a pas de diviseur commun; les zéros communs à σ et σ' forment alors, dans le voisinage de l'origine, une multiplicité à $2(n-2)$ paramètres réels; dans ce dernier cas si le nombre des variables est $n=2$, l'origine est un zéro commun isolé.

La fraction $\dfrac{\sigma(x, \ldots, y, z, t, u)}{\sigma'(x, \ldots, y, z, t, u)}$ est dite irréductible à l'origine si σ et σ' n'ont pas de diviseur commun, c'est-à-dire si leurs zéros forment une multiplicité à $2(n-2)$ paramètres réels dans le voisinage de l'origine.

La fraction $\dfrac{W}{V}$ sera dite irréductible en un point $(a, \ldots, b, c, d, e)$ où les fonctions W et V sont régulières, si W et V étant développées suivant les puissances entières de $x-a, \ldots, y-b, z-c, t-d, u-e$, la fraction obtenue est irréductible au point $(a, \ldots, b, c, d, e)$, au sens qui vient d'être donné à ce mot; la fraction $\dfrac{W}{V}$ sera irréductible à l'intérieur de $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, où W et V sont supposées régulières, si elle est irréductible en tout point intérieur à $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$; ou bien, ce qui revient au même, si dans le voisinage de tout zéro commun à W et V intérieur à $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ les zéros communs à W et V forment une multiplicité à $2(n-2)$ dimensions; dans le cas de deux variables $(n=2)$, les zéros communs devront être des points isolés.

Voici une dernière propriété connue des fractions dont les deux termes sont des fonctions régulières; si W, V, W_1, V_1 sont quatre fonctions régulières dans une même aire et si les deux fractions $\dfrac{W}{V}, \dfrac{W_1}{V_1}$ sont toutes les deux irréductibles et égales entre elles à l'intérieur de cette aire, le quotient $\dfrac{V}{V_1}$ est régulier et différent de 0 à l'intérieur de l'aire considérée.

16. Soit Φ une fonction des n variables complexes $x, \ldots, y, z, t, u$

n'admettant à l'intérieur de $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$ que des singularités non essentielles; ce qui signifie que si $(a, \ldots, b, c, d, e)$ est un point quelconque intérieur à $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$, on aura, à l'intérieur d'un cercle $\Gamma_{a,\ldots,b,c,d,e}$ de centre $(a, \ldots, b, c, d, e)$ et de rayon convenablement choisi:

$$\Phi = \frac{w_{a,\ldots,b,c,d,e}}{v_{a,\ldots,b,c,d,e}}$$

où $w_{a,\ldots,b,c,d,e}$ et $v_{a,\ldots,b,c,d,e}$ sont deux séries entières en $x-a, \ldots, y-b, z-c, t-d, u-e$, convergentes à l'intérieur de $\Gamma_{a,\ldots,b,c,d,e}$ et choisies de telle sorte que la fraction précédente soit irréductible à l'intérieur du cercle $\Gamma_{a,\ldots,b,c,d,e}$; ce dernier cercle peut toujours être supposé de rayon assez petit pour être tout entier intérieur à $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$. Dès lors, si $(a', \ldots, b', c', d', e')$ est un point intérieur à $\Gamma_{a,\ldots,b,c,d,e}$, on aura dans le voisinage de ce point:

$$\frac{w_{a,\ldots,b,c,d,e}}{v_{a,\ldots,b,c,d,e}} = \frac{w_{a',\ldots,b',c',d',e'}}{v_{a',\ldots,b',c',d',e'}};$$

ces deux fractions étant irréductibles, on en conclut que le quotient $\frac{v_{a,\ldots,b,c,d,e}}{v_{a',\ldots,b',c',d',e'}}$ est régulier et différent de o au point $(a', \ldots, b', c', d', e')$.

On peut, d'après cela, appliquer aux fonctions $v_{a,\ldots,b,c,d,e}$ le théorème VI: il existe une fonction V de $x, \ldots, y, z, t, u$, régulière à l'intérieur de $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ et telle que le quotient $\frac{V}{v_{a,\ldots,b,c,d,e}}$ soit régulier et différent de o au point $(a, \ldots, b, c, d, e)$ intérieur à $(s_1, \ldots, s_n)$; soit:

$$\frac{V}{v_{a,\ldots,b,c,d,e}} = \lambda_{a,\ldots,b,c,d,e};$$

on a également dans le domaine du point $(a, \ldots, b, c, d, e)$

$$\Phi = \frac{w_{a,\ldots,b,c,d,e}}{v_{a,\ldots,b,c,d,e}}$$

d'où:

$$\Phi . V = w_{a,\ldots,b,c,d,e} \cdot \lambda_{a,\ldots,b,c,d,e},$$

égalité qui montre que le produit $\Phi . V$ est une fonction W régulière en

tout point $(a, \ldots, b, c, d\ e)$ intérieur à $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$; par conséquent l'on a:

$$\Phi = \frac{W}{V},$$

W et V étant régulières à l'intérieur de $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$.

La fraction $\frac{W}{V}$ est irréductible à l'intérieur de $(s_1, \ldots, s_n)$; car on a dans le domaine de tout point $(a, \ldots, b, c, d, e)$ intérieur à $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$:

$$V = v_{a,\ldots,b,c,d,e} \cdot \lambda_{a,\ldots,b,c,d,e},$$

$$W = w_{a,\ldots,b,c,d,e} \cdot \lambda_{a,\ldots,b,c,d,e};$$

$\lambda_{a,\ldots,b,c,d,e}$ ne s'annulant pas au point $(a, \ldots, b, c, d, e)$, la fraction $\frac{W}{V}$ est irréductible en ce point comme la fraction $\frac{w_{a,\ldots,b,c,d,e}}{v_{a,\ldots,b,c,d,e}}$.

On a donc le théorème suivant:

Théorème VII. *Si une fonction Φ des n variables $x, \ldots, y, z, t, u$, n'admet à l'intérieur de $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$ que des singularités non essentielles, elle est égale à l'intérieur de $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ à la fraction $\frac{W}{V}$ dont les deux termes sont des fonctions régulières à l'intérieur de $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ et qui est irréductible à l'intérieur de $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$.*

17. Dans les théorèmes précédents, il a été constamment supposé que $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ étaient des aires connexes, limitées par des contours fermés, et, par conséquent, d'étendue finie; il a été supposé de plus que $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ étaient respectivement intérieures à $S_1, S_2, \ldots, S_n$; de telle sorte que les périmètres de $s_1, s_2, \ldots, s_n$ peuvent être choisis aussi voisins que l'on veut des périmètres de $S_1, S_2, \ldots, S_n$ mais non confondus avec eux. La suite du présent travail a pour but de démontrer que tous les théorèmes précédents subsistent lorsque $s_1, s_2, \ldots, s_n$ sont confondus avec $S_1, S_2, \ldots, S_n$, ces dernières aires étant limitées par des contours fermés ou non fermés, dont la nature sera précisée plus loin.

Cette extension, dans le cas général, exigeant la démonstration de plusieurs propositions préliminaires, fera l'objet de la quatrième partie.

Dans le cas particulier où chacune des aires S_1, S_2, ..., S_n est un cercle, le problème est plus simple, et je vais l'exposer dans les paragraphes suivants.

18. **Théorème VII.** *Soit γ un ensemble de cercles $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, tracés respectivement sur les plans des n variables $x, \ldots, y, z, t, u$ et ayant pour centres les origines des coordonnées dans les différents plans et des rayons finis ou infinis. On suppose qu'à chaque point $(a, \ldots, b, c, d, e)$ intérieur à γ correspondent:*

1° un cercle $\Gamma_{a,\ldots,b,c,d,e}$ de centre $(a, \ldots, b, c, d, e)$ compris à l'intérieur de γ;

2° une fonction $f_{a,\ldots,b,c,d,e}(x, \ldots, y, z, t, u)$ monotrope et sans espace lacunaire, définie à l'intérieur de $\Gamma_{a,\ldots,b,c,d,e}$ et telle que si $(a', \ldots, b', c', d', e')$ est un point intérieur à $\Gamma_{a,\ldots,b,c,d,e}$, les deux fonctions $f_{a,\ldots,b,c,d,e}(x, \ldots, y, z, t, u)$ et $f_{a',\ldots,b',c',d',e'}(x, \ldots, y, z, t, u)$ soient équivalentes au point $(a', \ldots, b', c', d', e')$.

Il existe une fonction monotrope et sans espace lacunaire $F(x, \ldots, y, z, t, u)$ définie à l'intérieur de γ et équivalente en tout point intérieur à γ à la fonction qui correspond à ce point.

Théorème VIII. *Au lieu de supposer, comme dans l'énoncé précédent chacune des fonctions $f_{a,\ldots,b,c,d,e}(x, \ldots, y, z, t, u)$ monotrope et sans espace lacunaire, on peut supposer que chacune d'elles est le logarithme d'une fonction $v_{a,\ldots,b,c,d,e}(x, \ldots, y, z, t, u)$ régulière à l'intérieur de $\Gamma_{a,\ldots,b,c,d,e}$ et telle que si $(a', \ldots, b', c', d', e')$ est un point intérieur à $\Gamma_{a,\ldots,b,c,d,e}$ le quotient*

$$\frac{v_{a,\ldots,b,c,d,e}(x, \ldots, y, z, t, u)}{v_{a',\ldots,b',c',d',e'}(x, \ldots, y, z, t, u)}$$

soit régulier et différent de 0 au point $(a', \ldots, b', c', d', e')$.

Il existe alors une fonction $F(x, \ldots, y, z, t, u)$ définie à un multiple près de $2i\pi$ à l'intérieur de γ, et équivalente en chaque point intérieur à γ à la fonction correspondant à ce point.

Démonstration du théorème VII. J'imagine à l'intérieur de chacun des n cercles γ_p $(p = 1, 2, \ldots, n)$ de l'énoncé, une suite indéfinie de cercles concentriques $\gamma_p^1, \gamma_p^2, \ldots, \gamma_p^m, \ldots$ dont les rayons vont en croissant avec l'indice supérieur, de telle sorte que γ_p^m ait pour limite γ_p lorsque m augmente indéfiniment; dans le cas où le cercle γ_p a un rayon infini, le rayon de γ_p^m devra augmenter indéfiniment avec m; je désignerai par γ^m l'ensemble des n cercles $\gamma_1^m, \gamma_2^m, \ldots, \gamma_n^m$. D'après les notations et con-

ventions adoptées, nous dirons que $\gamma^1, \gamma^2, \ldots, \gamma^m, \ldots$ est une suite infinie de cercles, tous intérieurs à γ, dont chacun est intérieur au suivant, et tels que γ^m ait pour limite γ pour m augmentant indéfiniment: cette dernière condition revient à dire que si $(a, \ldots, b, c, d, e)$ est un point quelconque intérieur à γ, on peut choisir m assez grand pour que le point considéré soit à l'intérieur de γ^m.

Le cercle γ^m étant intérieur à γ, il existe, d'après le théorème IV, une fonction monotrope et sans espace lacunaire, φ_m, des variables $x, \ldots, y, z, t, u$, définie à l'intérieur de γ^m et équivalente en tout point intérieur à γ^m à la fonction de l'énoncé correspondant à ce point. Il est clair qu'on aura une autre fonction satisfaisant aux mêmes conditions en retranchant de φ_m un polynôme quelconque entier en $x, \ldots, y, z, t, u$. A chaque cercle γ^m $(m = 1, 2, \ldots + \infty)$ correspond ainsi une fonction φ_m.

Considérons la différence

$$\varphi_{m+1} - \varphi_m = \delta_m;$$

elle est régulière en tout point intérieur à γ^m, car en un tel point φ_{m+1} et φ_m sont équivalentes à une même fonction; δ_m peut donc être considérée comme une série entière en $x, \ldots, y, z, t, u$ convergente dans γ^m. J'appelle Δ_m la série obtenue en remplaçant dans δ_m chaque terme par son module.

Soit $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_m, \ldots$ une suite indéfinie de nombres positifs dont la somme constitue une série convergente.

Je dis que les fonctions de la suite indéfinie: $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_m, \ldots$ peuvent être choisies de telle sorte qu'à l'intérieur de γ^{m-1} on ait:

$$\Delta_m < \varepsilon_m. \qquad (m = 2, 3, \ldots, \infty)$$

En effet, supposons que les $\mu - 1$ premières fonctions: $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_\mu$ satisfassent à la condition précédente; je vais montrer que $\varphi_{\mu+1}$ peut être choisie de façon à y satisfaire également.

Il existe en effet une fonction $\psi_{\mu+1}$ de $x, \ldots, y, z, t, u$ monotrope et sans espace lacunaire définie à l'intérieur de $\gamma^{\mu+1}$ et équivalente en tout point intérieur à $\gamma^{\mu+1}$ à la fonction qui correspond à ce point dans l'énoncé. On devra prendre pour $\varphi_{\mu+1}$ une fonction équivalente à $\psi_{\mu+1}$ à l'intérieur de $\gamma^{\mu+1}$, et satisfaisant de plus à l'inégalité prescrite.

Je pose:

$$\psi_{\mu+1} - \varphi_\mu = \zeta_\mu;$$

ζ_μ sera régulière dans γ^μ: c'est donc une série entière en $x, \ldots, y, z, t, u$ convergente dans γ^μ.

Je décompose la série ζ_μ en deux parties: l'une P_μ comprenant les premiers termes de la série, jusqu'à un certain rang qui sera déterminé ultérieurement, et l'autre ∂_μ comprenant les autres termes:

$$\zeta_\mu = P_\mu + \partial_\mu.$$

Si Δ_μ désigne la série obtenue en remplaçant chaque terme de ∂_μ par son module, on sait que le nombre des termes de P_μ peut être choisi assez grand pour qu'à l'intérieur de $\gamma^{\mu-1}$ (qui est compris dans le cercle de convergence γ^μ de la série), on ait:

$$\Delta_\mu < \varepsilon_\mu.$$

Posant alors: $\varphi_{\mu+1} = \psi_{\mu+1} - P_\mu$, j'obtiens une fonction $\varphi_{\mu+1}$ qui est équivalente à $\psi_{\mu+1}$ à l'intérieur de $\gamma_{\mu+1}$ et telle que:

$$\varphi_{\mu+1} - \varphi_\mu = \partial_\mu$$

et qu'à l'intérieur de $\gamma^{\mu-1}$, on ait:

$$\Delta_\mu < \varepsilon_\mu.$$

La fonction $\varphi_{\mu+1}$ ainsi déterminée satisfait aux conditions imposées.

On déterminera ainsi de proche en proche toutes les fonctions $\varphi_{\mu+2}$, $\varphi_{\mu+3}, \ldots$ satisfaisant à la condition prescrite.

Je définis une fonction $F(x, \ldots, y, z, t, u)$ à l'intérieur de γ par la condition suivante: à l'intérieur de γ^p ($p \geq 2$) on a:

$$(1) \qquad F(x, \ldots, y, z, t, u) = \varphi_{p+1} + \sum_{r=1}^{r=\infty} \partial_{p+r}$$

la série: $\sum_{r=1}^{r=\infty} \partial_{p+r}$ est une fonction régulière à l'intérieur de γ^p; car à l'intérieur de ce cercle on a la suite d'inégalités:

$$\Delta_{m+r} < \varepsilon_{m+r}. \qquad (r = 1, 2, \ldots, \infty)$$

Dès lors, d'après une propriété connue des séries à double entrée, la série $\sum_{r=1}^{r=\infty} \partial_{p+r}$ peut être ordonnée suivant les puissances entières et positives de $x, \ldots, y, z, t, u$ et conduit ainsi à une série convergente dans γ^p.

L'expression (1) définit donc une fonction bien déterminée à l'intérieur de γ^p. Il reste à montrer que deux quelconques des expressions de $F(x, \ldots, y, z, t, u)$ fournissent bien la même fonction. Soit (k étant un entier positif) les deux expressions:

$$F(x, \ldots, y, z, t, u) = \varphi_{p+1} + \sum_{r=1}^{r=\infty} \partial_{p+r}$$

et:

$$F(x, \ldots, y, z, t, u) = \varphi_{p+k+1} + \sum_{r=1}^{r=\infty} \partial_{p+k+r}$$

dont la première définit $F(x, \ldots, y, z, t, u)$ à l'intérieur de γ^p et la deuxième à l'intérieur de γ^{p+k}; elles définissent donc simultanément $F(x, \ldots, y, z, t, u)$ à l'intérieur de γ^p; pour vérifier que ces deux expressions sont identiques, il suffit de se rappeler que:

$$\partial_{p+r} = \varphi_{p+r+1} - \varphi_{p+r}.$$

La fonction $F(x, \ldots, y, z, t, u)$ satisfait à toutes les conditions de l'énoncé; car si $(a, \ldots, b, c, d, e)$ est un point intérieur à γ, ce point est intérieur à γ^p, p étant choisi assez grand. La fonction est donc définie dans le domaine du point $(a, \ldots, b, c, d, e)$ par:

$$F(x, \ldots, y, z, t, u) = \varphi_{p+1} + \sum_{r=1}^{r=\infty} \partial_{p+r},$$

la série du second membre étant une fonction régulière dans γ^p, $F(x, \ldots, y, z, t, u)$ est équivalente au point $(a, \ldots, b, c, d, e)$ à φ_{p+1} et par suite à $f_{a, \ldots, b, c, d, e}(x, \ldots, y, z, t, u)$.

Démonstration du théorème VIII. Cette démonstration est analogue à la précédente: la seule différence consiste en ce que les fonctions φ_m, $\psi_{\mu+1}$, $F(x, \ldots, y, z, t, u)$ ne sont considérées comme définies qu'à un multiple près de $2i\pi$. Il n'en est pas de même des séries ∂ dont chacune est déterminée sans ambiguïté. On est, en effet, conduit à poser comme

dans la démonstration précédente, les notations conservant un sens analogue:

$$\psi_{\mu+1} - \varphi_\mu = \zeta_\mu;$$

chacune des déterminations de $\psi_{\mu+1} - \varphi_\mu$ est régulière dans γ''; ζ_μ désignera le développement en série de l'une quelconque de ces déterminations, choisie arbitrairement; on décompose ensuite ζ_μ:

$$\zeta_\mu = P_\mu + \delta_\mu;$$

δ_μ est ainsi définie sans aucune ambiguïté.

19. Dans le cas du théorème VIII, en posant:

$$V(x, \ldots, y, z, t, u) = e^{U(x, \ldots, y, z, t, u)},$$

par un raisonnement déjà fait, $V(x, \ldots, y, z, t, u)$ est une fonction régulière dans γ; ou si l'on veut, est une série entière en $x, \ldots, y, z, t, u$ convergente dans γ. D'où le théorème:

Théorème IX. *Si à chaque point $(a, \ldots, b, c, d, e)$ intérieur à γ correspondent:*

1° *un cercle $\Gamma_{a,\ldots,b,c,d,e}$ de centre $(a, \ldots, b, c, d, e)$ et intérieur à γ;*

2° *une fonction $v_{a,\ldots,b,c,d,e}(x, \ldots, y, z, t, u)$ régulière dans $\Gamma_{a,\ldots,b,c,d,e}$ et telle que si $(a', \ldots, b', c', d', e')$ est un point intérieur à $\Gamma_{a,\ldots,b,c,d,e}$ le quotient $\dfrac{v_{a,\ldots,b,c,d,e}(x, \ldots, y, z, t, u)}{v_{a',\ldots,b',c',d',e'}(x, \ldots, y, z, t, u)}$ soit régulier et différent de o au point $(a', \ldots, b', c', d', e')$.*

Il existe une série entière en $x, \ldots, y, z, t, u$, $V(x, \ldots, y, z, t, u)$ convergente dans γ et telle que, en tout point $(a, \ldots, b, c, d, e)$ intérieur à γ, le quotient $\dfrac{V(x, \ldots, y, z, t, u)}{v_{a,\ldots,b,c,d,e}(x, \ldots, y, z, t, u)}$ soit régulier et différent de o.

Théorème X. *Si une fonction Φ des n variables $x, \ldots, y, z, t, u$ n'admet à l'intérieur de γ que des singularités non essentielles, elle est le quotient de deux séries entières convergentes dans γ, et telles que la fraction obtenue soit irréductible dans γ.*

Par une démonstration identique à celle du paragraphe 16, où l'on remplace $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$ et $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ tous les deux par γ, on voit que Φ est le quotient de deux fonctions régulières dans γ, et par suite

le quotient de deux séries entières en $x, y, \ldots, z, t, u$ convergentes dans γ.

20. Supposons que les n cercles $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, qui composent γ, aient tous des rayons infinis; le théorème précédent devient le théorème de M. Poincaré:

Si une fonction Φ des n variables $x, \ldots, y, z, t, u$ n'admet à distance finie que des singularités non essentielles, elle est le quotient de deux fonctions entières de $x, \ldots, y, z, t, u$, telles que la fraction obtenue soit irréductible en tout point à distance finie.

IV.

Généralisation des théorèmes précédents.

21. J'ai indiqué précédemment le but de cette quatrième partie. L'objet des propositions préliminaires que je vais établir est le suivant: je me suis servi dans la démonstration du théorème VII d'une propriété bien connue: si une fonction $f(x, \ldots, y, z, t, u)$ des n variables complexes $x, \ldots, y, z, t, u$ est régulière à l'intérieur et sur le périmètre de n cercles tracés sur les plans respectifs des n variables, il existe un polynôme entier $x, \ldots, y, z, t, u$ tel que sa différence avec la fonction $f(x, \ldots, y, z, t, u)$ ait, à l'intérieur des n cercles, un module plus petit qu'un nombre positif ε donné à l'avance. Il s'agit d'étendre cette proposition au cas où, aux n cercles, on substitue n contours fermés quelconques; si chacun de ces n contours est à connexion simple, je montrerai que le polynôme existe encore; si les contours sont à connexion multiple, en général le polynôme répondant à la question n'existe pas; mais on peut, au lieu du polynôme, trouver une fonction rationnelle de $x, \ldots, y, z, t, u$ satisfaisant à la condition précédente.

J'entends par contour fermé simple, une ligne connexe fermée, ne présentant aucune boucle; d'après cela un contour fermé simple partage

tout le plan en deux aires connexes: l'une *intérieure* au contour, l'autre *extérieure*, la première d'étendue *finie*, la seconde d'étendue *infinie*.

22. Je donnerai d'abord la démonstration sommaire des deux propositions suivantes.

Soient Γ et Γ' deux cercles tracés respectivement sur les plans des deux variables x et y, ayant pour centres les origines des coordonnées et pour rayons R et R'.

1°. *Si $f(x, y)$ est une fonction des deux variables x et y régulière pour x intérieur à Γ et pour y extérieur à Γ'; si, de plus, $f(x, y)$ tend vers 0 pour y augmentant indéfiniment, x conservant une valeur constante intérieure à Γ, la fonction $f(x, y)$ est développable suivant une série entière en x et $\frac{1}{y}$, absolument convergente pour x dans Γ et y extérieur à Γ'; soit:*

$$f(x, y) = \Sigma A_{\alpha\beta} x^\alpha y^{-\beta}. \qquad (\alpha=0,1,2,\ldots,+\infty, \ \beta=1,2,\ldots,+\infty)$$

J'exprimerai plus brièvement les conditions auxquelles $f(x, y)$ est supposée satisfaire dans cet énoncé, en disant qu'elle est régulière pour x dans Γ et y extérieur à Γ' et qu'elle s'annule pour $y = \infty$.

Le théorème à démontrer revient au suivant: si l'on pose:

$$y = \frac{R'^2}{y'}$$

la fonction: $f\left(x, \frac{R'^2}{y'}\right)$ est régulière pour (x, y') intérieur à (Γ, Γ'). Il ne peut y avoir de doute que pour la valeur $y' = 0$.

Je trace un cercle γ' concentrique à Γ' et de rayon $\rho > R'$; comme $f(x, y)$ s'annule pour $y = \infty$, on aura pour x intérieur à Γ et y extérieur à γ':

$$f(x, y) = -\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma'} \frac{f(x, z)\,dz}{z - y}$$

l'intégrale étant prise le long de γ' dans le sens direct. En remplaçant y par $\frac{R'^2}{y'}$, il vient, pour x intérieur à Γ et y' intérieur à un cercle γ'_1 concentrique à Γ' et de rayon $\rho_1 = \frac{R'^2}{\rho}$:

$$f\left(x, \frac{R'^2}{y'}\right) = -\frac{1}{2i\pi} y' \int_{\gamma'} \frac{f(x, z)\,dz}{y'z - R'^2};$$

on voit par cette expression que pour $y' = 0$, $f\left(x, \frac{R'^2}{y'}\right)$ est régulière: le théorème est ainsi démontré.

2°. *Si $f(x, y)$ est régulière pour x et y extérieurs à Γ et Γ' et si elle tend vers 0 pour x augmentant indéfiniment, y conservant une valeur constante extérieure à Γ' et pour y augmentant indéfiniment, x conservant une valeur constante extérieure à Γ; $f(x, y)$ est développable en série entière en $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ absolument convergente à l'extérieur de Γ et Γ', et de la forme:*

$$f(x, y) = \Sigma A_{\alpha\beta} x^{-\alpha} y^{-\beta}. \qquad (\alpha=1,2,\ldots,+\infty,\ \beta=1,2,\ldots,+\infty)$$

J'exprimerai plus brièvement les conditions auxquelles satisfait par hypothèse $f(x, y)$ en disant qu'elle est régulière pour (x, y) extérieur à (Γ, Γ') et qu'elle s'annule pour $x = \infty$ ainsi que pour $y = \infty$.

En posant: $x = \frac{R^2}{x'}$, $y = \frac{R'^2}{y'}$, le théorème revient au suivant: $f\left(\frac{R^2}{x'}, \frac{R'^2}{y'}\right)$ est régulière pour (x', y') intérieur à (Γ, Γ'); on a, effet, pour x extérieur à Γ et y extérieur au cercle γ' concentrique à Γ et de rayon $\rho > R'$:

$$f(x, y) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma'} \frac{f(x, z)\,dz}{z - y}$$

ou, pour y' intérieur à γ'_1 concentrique à Γ' et de rayon $\frac{R'^2}{\rho}$:

$$f\left(x, \frac{R'^2}{y'}\right) = -\frac{1}{2i\pi} y' \int_{\gamma'} \frac{f(x, z)\,dz}{y'z - R'^2};$$

cela montre que $f\left(x, \frac{R'^2}{y'}\right)$ est régulière pour x extérieur à Γ et y' intérieur à Γ'; comme cette fonction s'annule pour $x = \infty$, en vertu de 1°, $f\left(\frac{R^2}{x'}, \frac{R'^2}{y'}\right)$ sera régulière pour (x', y') intérieur à (Γ, Γ').

23. **Proposition I.** *Soient:*

C et C' deux contours fermés simples tracés sur les plans des deux variables x et y;

a et c deux points du plan de la variable x extérieurs à C;

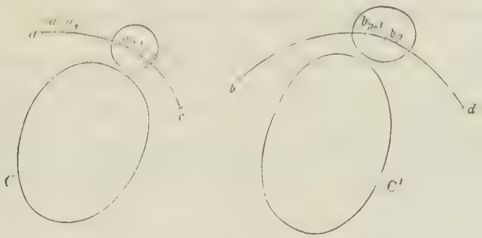
b et d deux points du plan de la variable y extérieurs à C';

$f(x, y)$ une fonction de x et y qui est régulière excepté pour les valeurs $x = a$ et $y = b$ et qui s'annule pour $x = \infty$ ainsi que pour $y = \infty$;

Il existe un polynôme entier en $\frac{1}{x-c}$, $\frac{1}{y-d}$, $Q\left(\frac{1}{x-c}, \frac{1}{y-d}\right)$ tel qu'en tout point (x, y) intérieur à (c, c'), on ait:

$$\text{mod.}\left[f(x, y) - Q\left(\frac{1}{x-c}, \frac{1}{y-d}\right)\right] < \varepsilon.$$

ε étant un nombre positif donné à l'avance.



Sur le plan de la variable x je trace une ligne ac partant de a et aboutissant à c, tout entière extérieure au contour C; et sur le plan de la variable y, je trace d'une façon analogue la ligne bd extérieure au contour C'. Je marque sur la ligne ac, en allant de a vers c, n points $a_1, a_2, \ldots, a_n$, et sur bd, n points $b_1, b_2, \ldots, b_n$, en allant de b vers d. Je suppose n choisi assez grand et les points assez rapprochés pour que la condition suivante soit remplie: dans les deux suites de points: $a, a_1, a_2, \ldots, a_n, c$ et $b, b_1, b_2, \ldots, b_n, d$, la distance de deux points consécutifs quelconques est inférieure à une longueur R, plus petite elle-même que les distances des lignes ac et C d'une part, bd et C' d'autre part; de telle sorte que les cercles de rayon R et de centres a_p, b_p, laissent à leur extérieur les contours C et C' et comprennent à leur intérieur respectivement les points a_{p-1} et b_{p-1}. Les cercles le rayon R ayant pour

centres les points $a_1, a_2, \ldots, a_n, c$ et $b_1, b_2, \ldots, b_n, d$ seront désignés dans la démonstration simplement par leurs centres.

Je considère les cercles a_1 et b_1; les points a et b étant intérieurs à ces cercles, la fonction $f(x, y)$ est développable en série entière en $\frac{1}{x-a_1}, \frac{1}{y-b_1}$, absolument convergente à l'extérieur et sur le périmètre des cercles a_1 et b_1. J'appelle $P_1\left(\frac{1}{x-a_1}, \frac{1}{y-b_1}\right)$ le polynôme formé par les premiers termes de ce développement, pris en nombre assez grand pour que, à l'extérieur des cercles a_1 et b_1, on ait:

$$\operatorname{mod}\left[f(x, y) - P_1\left(\frac{1}{x-a_1}, \frac{1}{y-b_1}\right)\right] < \frac{\varepsilon}{n+1};$$

le polynôme P_1 ne renferme pas de terme indépendant de $\frac{1}{x-a_1}, \frac{1}{y-b_1}$.

Les points a_1 et b_1 étant intérieurs aux cercles a_2 et b_2, $P_1\left(\frac{1}{x-a_1}, \frac{1}{y-b_1}\right)$ est développable en série entière en $\frac{1}{x-a_2}, \frac{1}{y-b_2}$ absolument convergente à l'extérieur et sur le périmètre des cercles a_2 et b_2; soit $P_2\left(\frac{1}{x-a_2}, \frac{1}{y-b_2}\right)$ le polynôme formé par les premiers termes du développement pris en nombre assez grand pour que l'on ait à l'extérieur des cercles a_2 et b_2:

$$\operatorname{mod}\left[P_1\left(\frac{1}{x-a_1}, \frac{1}{y-b_1}\right) - P_2\left(\frac{1}{x-a_2}, \frac{1}{y-b_2}\right)\right] < \frac{\varepsilon}{n+1}.$$

En poursuivant ce raisonnement on obtient une suite de $(n+1)$ polynômes satisfaisant aux $(n+1)$ inégalités:

$$\operatorname{mod}\left[f(x, y) - P_1\left(\frac{1}{x-a_1}, \frac{1}{y-b_1}\right)\right] < \frac{\varepsilon}{n+1} \text{ à l'extérieur des cercles } a_1 \text{ et } b_1,$$

$$\operatorname{mod}\left[P_1\left(\frac{1}{x-a_1}, \frac{1}{y-b_1}\right) - P_2\left(\frac{1}{x-a_2}, \frac{1}{y-b_2}\right)\right] < \frac{\varepsilon}{n+1} \text{ à l'extérieur de } a_2 \text{ et } b_2,$$

. . . .

$$\operatorname{mod}\left[P_{n-1}\left(\frac{1}{x-a_{n-1}}, \frac{1}{y-b_{n-1}}\right) - P_n\left(\frac{1}{x-a_n}, \frac{1}{y-b_n}\right)\right] < \frac{\varepsilon}{n+1} \text{ à l'extérieur de } a_n \text{ et } b_n,$$

$$\operatorname{mod}\left[P_n\left(\frac{1}{x-a_n}, \frac{1}{y-b_n}\right) - Q\left(\frac{1}{x-c}, \frac{1}{y-d}\right)\right] < \frac{\varepsilon}{n+1} \text{ à l'extérieur de } c \text{ et } d.$$

Ces inégalités sont simultanément vérifiées à l'intérieur de (C, C'); on en conclut, le module de la somme étant moindre que la somme des modules:

$$\text{mod}\left[f(x, y) - Q\left(\frac{1}{x-c}, \frac{1}{y-d}\right)\right] < \varepsilon \text{ à l'intérieur de } (C, C').$$

Le théorème énoncé est donc démontré.

24. **Remarque.** La démonstration précédente suppose que chacun des points c et d est à distance finie: je vais montrer que c ou d, séparément ou tous les deux à la fois peuvent être rejetés à l'infini, $\frac{1}{x-c}$, $\frac{1}{y-d}$ devant être alors remplacés respectivement par x et par y.

Je trace en effet un cercle Γ de centre x_0 enveloppant C et je suppose le point c pris à distance finie mais à l'extérieur de Γ; je trace un cercle γ de centre d et de rayon assez petit pour que C' lui soit complètement extérieur.

Le polynôme $Q\left(\frac{1}{x-c}, \frac{1}{y-d}\right)$ du théorème précédent est développable en série entière en $x-x_0$ et $\frac{1}{y-d}$ absolument convergente pour x intérieur à Γ ou sur son périmètre et pour y extérieur à γ ou sur son périmètre. Soit $Q_1\left(x-x_0, \frac{1}{y-d}\right)$ le polynôme formé par les premiers termes de ce développement, pris en nombre assez grand: on aura pour x intérieur à Γ et y extérieur à γ, et à fortiori pour (x, y) intérieur à (C, C'):

$$\text{mod}\left[Q\left(\frac{1}{x-c}, \frac{1}{y-d}\right) - Q_1\left(x-x_0, \frac{1}{y-d}\right)\right] < \varepsilon$$

et comme:

$$\text{mod}\left[f(x, y) - Q\left(\frac{1}{x-c}, \frac{1}{y-d}\right)\right] < \varepsilon \text{ pour } (x, y) \text{ intérieur à } (C, C'),$$

on en conclut:

$$\text{mod}\left[f(x, y) - Q_1\left(x-x_0, \frac{1}{y-d}\right)\right] < 2\varepsilon \text{ pour } (x, y) \text{ intérieur à } (C, C'),$$

$Q_1'\left(x - x_0, \frac{1}{y-d}\right)$ est un polynôme entier en x et $\frac{1}{y-d}$, ce qui montre que le point c peut être supposé rejeté à l'infini.

Pour montrer que les deux points c et d peuvent être rejetés à l'infini simultanément, je trace les cercles Γ' et Γ'' de centres arbitraires x_0 et y_0 et enveloppant respectivement C' et C''; je suppose c et d pris à distance finie mais extérieurs à Γ' et Γ''; le polynôme $Q\left(\frac{1}{x-c}, \frac{1}{y-d}\right)$ est développable en série entière en $x - x_0$, $y - y_0$, absolument convergente dans Γ', Γ'' et sur leurs périmètres; soit $Q_2(x - x_0, y - y_0)$ le polynôme formé par l'ensemble des premiers termes du développement pris en nombre assez grand: on aura pour (x, y) intérieur à (C', C''):

$$\text{mod}\,[f(x, y) - Q_2(x - x_0; y - y_0)] < 2\varepsilon;$$

Q_2 étant un polynôme entier en x et y, on voit que c et d peuvent être rejetés tous deux à l'infini.

Proposition II. *Soient:*

C_1' et C_1'' deux contours fermés simples pris respectivement sur les plans des deux variables x et y;

C' et C'' deux contours fermés simples complètement intérieurs respectivement à C_1' et C_1'';

$f(x, y)$ une fonction des deux variables x et y régulière en tout point intérieur à (C_1', C_1'');

a un point extérieur à C_1', à distance finie ou infinie;

b un point extérieur à C_1'' à distance finie ou infinie;

Il existe un polynôme entier en $\frac{1}{x-a}$, $\frac{1}{y-b}$, $Q\left(\frac{1}{x-a}, \frac{1}{y-b}\right)$ tel qu'en tout point intérieur à (C', C''), on ait:

$$\text{mod}\left[f(x, y) - Q\left(\frac{1}{x-a}, \frac{1}{y-b}\right)\right] < \varepsilon$$

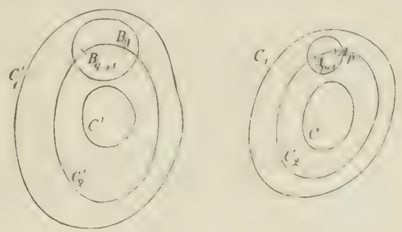
ε étant un nombre positif donné à l'avance.

Je trace le contour fermé simple C_2' enveloppant C' et enveloppé

par C_1; et le contour fermé simple C''_2 enveloppant C'' et enveloppé par C_1. Le théorème de Cauchy donne pour (x, y) intérieur à (C_1, C''_2):

$$f(x, y) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C_2} \frac{f(x, z)\,dz}{z - y}.$$

Je partage le contour d'intégration C''_2 en n parties consécutives B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, ..., $B_{n-1}B_n$, B_nB_1 assez petites pour que chacune



d'elles B_qB_{q+1} soit comprise à l'intérieur d'un cercle γ'_q laissant à son extérieur les contours C''_1 et C'' et par conséquent compris entre ces deux contours. Je pose

$$f_q(x, y) = \frac{1}{2i\pi}\int_{B_qB_{q+1}} \frac{f(x, z)\,dz}{z - y}$$

le chemin d'intégration étant B_qB_{q+1}; cette fonction $f_q(x, y)$ est régulière pour x intérieur à C_1 et pour y non situé sur B_qB_{q+1}; de plus elle s'annule pour $y = \infty$. On a d'ailleurs pour (x, y) intérieur à (C_1, C''_2):

$$(1) \qquad f(x, y) = \Sigma f_q(x, y). \qquad {\scriptstyle (q=1, 2, \ldots, n)}$$

J'applique le théorème de Cauchy à la fonction $f_q(x, y)$ et au contour C_2; j'aurai pour x intérieur à C_2 et y quelconque mais non situé sur B_qB_{q+1}:

$$f_q(x, y) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C_2} \frac{f_q(z, y)\,dz}{z - x}.$$

Je partage C_2 en m parties $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_mA_1$, telles que chacune d'elles A_pA_{p+1} soit intérieure à un cercle γ_p laissant à son extérieur les contours C et C_1 et je pose:

$$\varphi_{pq}(x, y) = \frac{1}{2i\pi}\int_{A_pA_{p+1}} \frac{f_q(z, y)\,dz}{z - x}$$

A_pA_{p+1} étant le chemin d'intégration. La fonction $\varphi_{pq}(x, y)$ est régulière tant que x et y ne sont pas situés respectivement sur A_pA_{p+1} et B_qB_{q+1}. De plus $\varphi_{pq}(x, y)$ s'annule pour $y = \infty$ comme $f_q(x, y)$, et s'annule évidemment pour $x = \infty$.

On a pour x intérieur à C_2 et y non situé sur B_qB_{q+1}:

$$(2) \qquad f_q(x, y) = \Sigma\varphi_{pq}(x, y). \qquad {\scriptstyle (p=1,2,\ldots,m)}$$

Les égalités (1) et (2) sont simultanément vérifiées pour (x, y) intérieur à (C_2, C_2''): on en conclut, pour (x, y) intérieur à (C_2, C_2''), l'égalité:

$$f(x, y) = \Sigma\Sigma\varphi_{pq}(x, y). \qquad {\scriptstyle (p=1,2,\ldots,m;\ q=1,2,\ldots,n)}$$

Si j'appelle a_p et b_q les centres respectifs des cercles γ_p et γ_q', la fonction $\varphi_{pq}(x, y)$, régulière à l'extérieur de ces cercles et s'annulant pour $x = \infty$ ainsi que pour $y = \infty$ est développable en série entière en $\frac{1}{x - a_p}$ et $\frac{1}{y - b_q}$ absolument convergente à l'extérieur et sur le périmètre de ces cercles. J'appelle $P_{pq}\left(\frac{1}{x - a_p}, \frac{1}{y - b_q}\right)$ le polynôme formé par les premiers termes de ce développement, pris en nombre assez grand pour que à l'extérieur de γ_p et γ_p' et à fortiori à l'intérieur de (C, C''), on ait:

$$\operatorname{mod}\left[\varphi_{pq}(x, y) - P_{pq}\left(\frac{1}{x - a_p}, \frac{1}{y - b_q}\right)\right] < \frac{\varepsilon}{2mn} \quad [\text{pour } (x, y) \text{ intérieur à } (C, C'')].$$

Or le polynôme $P_{pq}\left(\frac{1}{x - a_p}, \frac{1}{y - b_q}\right)$ qui n'a pas de terme indépendant de $\frac{1}{x - a_p}$ et $\frac{1}{y - b_q}$, n'a pas d'autre point singulier que $x = a_p$ extérieur à C et $y = b_q$ extérieur à C'' et de plus s'annule pour x ou y infini.

D'après la proposition I, il existe un polynôme entier en $\frac{1}{x-a}$ et $\frac{1}{y-b}$, $Q_{pq}\left(\frac{1}{x-a}, \frac{1}{y-b}\right)$, tel que:

$$\operatorname{mod}\left[P_{pq}\left(\frac{1}{x-a_p}, \frac{1}{y-b_q}\right) - Q_{pq}\left(\frac{1}{x-a}, \frac{1}{y-b}\right)\right] < \frac{\varepsilon}{2mn} \quad [\text{pour } (x, y) \text{ intérieur à } (C, C')].$$

En additionnant cette inégalité avec la précédente, il vient:

$$\operatorname{mod}\left[\varphi_{pq}(x, y) - Q_{pq}\left(\frac{1}{x-a}, \frac{1}{y-b}\right)\right] < \frac{\varepsilon}{mn} \quad [\text{pour } (x, y) \text{ intérieur à } (C, C')].$$

J'imagine écrites les mn inégalités analogues à la précédente obtenues en faisant $p = 1, 2, \ldots, m$, $q = 1, \ldots, n$; elles donnent, en remarquant que:

$$\sum\sum\varphi_{pq}(x, y) = f(x, y) \qquad (p = 1, 2, \ldots, m;\ q = 1, 2, \ldots, n)$$

et que $\sum\sum Q_{pq}\left(\frac{1}{x-a}, \frac{1}{y-b}\right)$ est un polynôme entier en $\frac{1}{x-a}$, $\frac{1}{y-b}$, soit $Q\left(\frac{1}{x-a}, \frac{1}{y-b}\right)$:

$$\operatorname{mod}\left[f(x, y) - Q\left(\frac{1}{x-a}, \frac{1}{y-b}\right)\right] < \varepsilon \quad [\text{pour } (x, y) \text{ intérieur à } (C, C')].$$

C'est le théorème énoncé.

Si a et b sont tous deux à l'infini, on aura au lieu de $Q\left(\frac{1}{x-a}, \frac{1}{y-b}\right)$ un polynôme entier en x et y.

Proposition III. *Soient:*

C et C' deux contours fermés simples tracés sur les plans des deux variables x et y;

a et c deux points du plan de la variable x extérieurs à C;

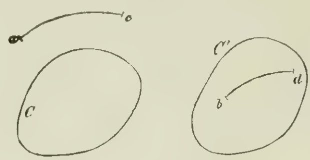
b et d deux points du plan de la variable y intérieurs à C':

$f(x, y)$ une fonction des deux variables x et y, régulière en tout point excepté pour les valeurs $x = a$ et $y = b$ et s'annulant pour x infini ainsi que pour y infini;

Il existe un polynôme entier en $\frac{1}{x-c}$ *et* $\frac{1}{y-d}$, $Q\left(\frac{1}{x-c}, \frac{1}{y-d}\right)$ *tel que en tout point* (x, y) *intérieur à* C *et extérieur à* C', *on ait:*

$$\mathrm{mod}\left[f(x, y) - Q\left(\frac{1}{x-c}, \frac{1}{y-d}\right)\right] < \varepsilon$$

ε *étant un nombre positif donné à l'avance.*



Je trace une ligne ac partant de a et aboutissant à c, extérieure à C; et d'une façon analogue une ligne bd intérieure à C'. Pour le reste, la démonstration est identique à celle de la proposition I. Le point c peut être rejeté à l'infini.

Proposition IV. *Soient:*

C_1 *et* C_1' *deux contours fermés simples tracés respectivement sur les plans des deux variables* x *et* y;

C *un contour fermé simple intérieur à* C_1;

C' *un contour fermé simple enveloppant* C_1';

$f(x, y)$ *une fonction des deux variables* x *et* y *régulière pour* x *intérieur à* C_1 *et* y *extérieur à* C_1' *et qui s'annule pour* $y = \infty$;

a *un point du plan de la variable* x *extérieur à* C_1, *à distance finie ou infinie;*

b *un point du plan de la variable* y *intérieur à* C_1';

Il existe un polynôme entier en $\frac{1}{x-a}$, $\frac{1}{y-b}$, $Q\left(\frac{1}{x-a}, \frac{1}{y-b}\right)$ *tel que en tout point* (x, y) *intérieur à* C *et extérieur à* C', *on ait:*

$$\mathrm{mod}\left[f(x, y) - Q\left(\frac{1}{x-a}, \frac{1}{y-b}\right)\right] < \varepsilon$$

ε *étant un nombre positif donné à l'avance.*

Je trace le contour fermé simple C_2' enveloppant C_1' et enveloppé par C'; on a, en remarquant que $f(x, y)$ s'annule pour $y = \infty$:

$$f(x, y) = -\frac{1}{2i\pi}\int_{C_2'} \frac{f(x, z)dz}{z - y} \quad \text{pour } x \text{ intérieur à } C_1 \text{ et } y \text{ extérieur à } C_2',$$

l'intégrale est prise le long de C_2' dans le sens direct. Pour la suite, la démonstration est identique à celle de la proposition II.



25. Les deux propositions suivantes se démontrent encore comme les précédentes.

Proposition V. *Soient:*

C et C' deux contours fermés simples tracés respectivement sur les plans des deux variables x et y;

a et c deux points du plan de la variable x intérieurs à C;

b et d deux points du plan de la variable y intérieurs à C';

$f(x, y)$ une fonction régulière excepté pour les valeurs $x = a$ et $y = b$, et qui s'annule pour $x = \infty$ ainsi que pour $y = \infty$;

Il existe un polynôme entier en $\frac{1}{x - c}$, $\frac{1}{y - d}$, $Q\left(\frac{1}{x - c}, \frac{1}{y - d}\right)$ tel que en tout point (x, y) extérieur à (C, C') on ait:

$$\operatorname{mod}\left[f(x, y) - Q\left(\frac{1}{x - c}, \frac{1}{y - d}\right)\right] < \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif donné à l'avance.

Proposition VI. *Soient:*

C_1 *et* C_1' *deux contours fermés simples tracés sur les plans respectifs des variables* x *et* y;

C *et* C' *deux contours fermés simples enveloppant chacun des deux précédents;*

a *et* b *deux points intérieurs respectivement à* C_1 *et* C_1';

$f(x, y)$ *une fonction des deux variables* x *et* y *régulière pour* (x, y) *extérieur à* (C_1, C_1') *et s'annulant pour* $x = \infty$ *ainsi que pour* $y = \infty$:

Il existe un polynôme entier en $\frac{1}{x-a}$, $\frac{1}{y-b}$, $Q\left(\frac{1}{x-a}, \frac{1}{y-b}\right)$ *tel que en tout point* (x, y) *extérieur à* (C, C'), *on ait:*

$$\operatorname{mod}\left[f(x, y) - Q\left(\frac{1}{x-a}, \frac{1}{y-b}\right)\right] < \varepsilon,$$

ε *étant un nombre positif donné à l'avance.*

26. Voici quelques notations employées dans l'énoncé et la démonstration de la proposition suivante:

S désigne une aire connexe prise sur le plan de la variable x et limitée par $n + 1$ contours fermés simples $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n$, dont le premier C_0 enveloppe S et chacun des n autres est enveloppé par S;

C_0^1 désigne un contour fermé simple enveloppant C_0;

C_0^2 désigne un contour fermé simple enveloppant C_0^1;

C_p^1 $(p = 1, 2, \ldots, n)$ désigne un contour fermé simple enveloppé par C_p, et C_p^2 désigne un contour fermé simple enveloppé par C_p^1; S_1 désigne l'aire limitée par les $(n + 1)$ contours $C_0^1, C_1^1, C_2^1, \ldots, C_n^1$; et S_2 l'aire limitée par les $(n + 1)$ contours $C_0^2, C_1^2, \ldots, C_n^2$; de cette sorte S est complètement intérieure à S_1, et S_1 elle-même complètement intérieure à S_2.

Les notations $S', C_0', C_1', \ldots, C_m'$; $S_1', C_0^{1\prime}, C_1^{1\prime}, \ldots, C_m^{1\prime}$; $S_2', C_0^{2\prime}, \ldots, C_m^{2\prime}$, ont une signification analogue relativement au plan de la variable y.

Proposition VII. *Soient:*

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, $(n + 1)$ *points du plan de la variable* x *dont le premier* a_0 *est extérieur à* C_0^2; *et dont chacun des* n *autres* a_p $(p = 1, 2, \ldots, n)$ *est intérieur au contour* C_p^2;

$b_0, b_1, b_2, \ldots, b_m$, $(m+1)$ *points du plan de la variable* y *situés d'une façon analogue relativement aux* $(m+1)$ *contours* $C_0^{2'}, C_1^{2'}, \ldots, C_m^{2'}$;

$f(x, y)$ *une fonction de* x *et* y *régulière à l'intérieur de l'aire* (S_2, S_2').

Il existe un polynôme $Q\left(\frac{1}{x-a_0}, \frac{1}{x-a_1}, \ldots, \frac{1}{x-a_n}, \frac{1}{y-b_0}, \frac{1}{y-b_1}, \ldots, \frac{1}{y-b_m}\right)$ *entier en* $\frac{1}{x-a_0}, \frac{1}{x-a_1}, \ldots, \frac{1}{x-a_n}, \frac{1}{y-b_0}, \frac{1}{y-b_1}, \ldots, \frac{1}{y-b_m}$, *et tel que en tout point* (x, y) *intérieur a* (S, S'), *on ait:*

$$\operatorname{mod}\left[f(x, y) - Q\left(\frac{1}{x-a_0}, \ldots, \frac{1}{x-a_n}, \frac{1}{y-b_0}, \ldots, \frac{1}{y-b_m}\right)\right] < \varepsilon,$$

ε *étant un nombre positif donné a l'avance.*

J'applique à la fonction $f(x, y)$ et au périmètre de l'aire S_1' du plan de la variable y le théorème de Cauchy: j'aurai ainsi pour (x, y) intérieur à (S_2, S_1')

$$f(x, y) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C_0^{1'}} \frac{f(x, z)\,dz}{z-y} + \frac{1}{2i\pi}\int_{C_1^{1'}} \frac{f(x, z)\,dz}{z-y} + \ldots + \frac{1}{2i\pi}\int_{C_m^{1'}} \frac{f(x, z)\,dz}{z-y},$$

le sens des intégrations étant direct pour le contour $C_0^{1'}$ et indirect pour les m contours $C_1^{1'}, C_2^{1'}, \ldots, C_m^{1'}$.

Je pose:

$$\varphi_q(x, y) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C_q^{1'}} \frac{f(x, z)\,dz}{z-y} \qquad (q = 0, 1, 2, \ldots, m)$$

de telle sorte qu'on aura pour (x, y) intérieur à (S_2, S_1'):

$$(1) \qquad f(x, y) = \Sigma\varphi_q(x, y). \qquad (q = 0, 1, 2, \ldots, m)$$

Considérons la fonction $\varphi_q(x, y)$, $(q = 0, 1, 2, \ldots, m)$; son expression:

$$\varphi_q(x, y) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C_q^{1'}} \frac{f(x, z)\,dz}{z-y}$$

montre qu'elle est régulière pour x intérieur à S_2 et pour y quelconque mais non situé sur $C_q^{1'}$ qui est une coupure relative à la seule variable y; de plus $\varphi_q(x, y)$ s'annule pour $y = \infty$.

J'applique à nouveau le théorème de Cauchy à la fonction $\varphi_q(x, y)$, $(q = 0, 1, 2, \ldots, m)$ et au périmètre de l'aire S_1 du plan de la variable x; on aura pour x intérieur à S_1 et y non situé sur $C_q^{1\prime}$:

$$\varphi_q(x, y) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C_0^1} \frac{\varphi_q(z, y)dz}{z - x} + \frac{1}{2i\pi}\int_{C_1^1} \frac{\varphi_q(z, y)dz}{z - x} + \ldots + \frac{1}{2i\pi}\int_{C_n^1} \frac{\varphi_q(z, y)dz}{z - x},$$

le sens des intégrations étant direct pour C_0^1 et indirect pour les n contours $C_1^1, \ldots, C_n^1$.

Je pose:

$$\psi_{pq}(x, y) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C_p^1} \frac{\varphi_q(z, y)dz}{z - x}; \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

de telle sorte que pour x intérieur à S_1 et y non situé sur $C_q^{1\prime}$, on aura:

$$(2) \qquad \varphi_q(x, y) = \Sigma\psi_{pq}(x, y). \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

Considérons la fonction $\psi_{pq}(x, y)$; son expression:

$$\psi_{pq}(x, y) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C_p^1} \frac{\varphi_q(z, y)dz}{z - x}$$

montre qu'elle est régulière dans toute l'étendue des deux plans des variables x et y en exceptant la coupure C_p^1 du plan de la variable x et la coupure $C_p^{1\prime}$ du plan de la variable y, (coupure qu'admet la fonction $\varphi_q(z, y)$ elle-même); de plus $\psi_{pq}(x, y)$ s'annule pour $x = \infty$ et s'annule aussi pour $y = \infty$ comme la fonction $\varphi_q(z, y)$.

Comparons les égalités (1) et (2) qui ont lieu simultanément pour (x, y) intérieur à (S_1, S_1'); il vient:

$$(3) \qquad f(x, y) = \Sigma\Sigma\psi_{pq}(x, y) \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots, n;\ q = 0, 1, 2, \ldots, m)$$

pour (x, y) intérieur à (S_1, S_1') et à fortiori pour (x, y) intérieur à (S, S').

On obtient ainsi pour $f(x, y)$, à l'intérieur de (S, S') une expression qui est la somme de $(m + 1)(n + 1)$ fonctions $\psi_{pq}(x, y)$, $(p = 0, 1, 2, \ldots, n;$ $q = 0, 1, 2, \ldots, m)$; je classe ces fonctions en quatre groupes:

1° la fonction $\psi_{00}(x, y)$ qui ne cesse d'être régulière que sur les

coupures C_0^1 et $C_0^{1\prime}$; elle est en particulier régulière pour (x, y) intérieur à $(C_0^1, C_0^{1\prime})$; comme le contour (C_0, C_0'') est intérieur à $(C_0^1, C_0^{1\prime})$, il existe (proposition II) un polynôme Q_{00} entier en $\frac{1}{x - a_0}, \frac{1}{y - b_0}$ tel que à l'intérieur de (C_0, C_0'') et à fortiori à l'intérieur de (S, S'), on ait:

$$(4) \qquad \text{mod}\,[\psi_{00}(x, y) - Q_{00}] < \frac{\varepsilon}{(m+1)(n+1)} \quad [\text{à l'intérieur de } (S, S')];$$

2° le second groupe est composé des m fonctions $\psi_{0q}(x, y)$ $(q = 1, 2, \ldots, m)$; chacune de ces fonctions $\psi_{0q}(x, y)$ est régulière pour x intérieur à C_0^1 et y extérieur à $C_q^{1\prime}$ et s'annule pour $y = \infty$; il existe (proposition IV) un polynôme Q_{0q} entier en $\frac{1}{x - a_0}, \frac{1}{y - b_q}$ tel que pour x intérieur à C_0 et y extérieur à C_q'', et à fortiori pour (x, y) intérieur à (S, S') on ait: $(q = 1, 2, \ldots, m)$

$$(5) \qquad \text{mod}\,[\psi_{0q}(x, y) - Q_{0q}] < \frac{\varepsilon}{(m+1)(n+1)} \quad \text{pour } (x, y) \text{ intérieur à } (S, S');$$

3° le troisième groupe, analogue au précédent, est composé des n fonctions $\psi_{p0}(x, y)$ $(p = 1, 2, \ldots, n)$; chacune de ces fonctions $\psi_{p0}(x, y)$ est régulière pour x extérieur à C_p^1 et y intérieur à $C_0^{1\prime}$ et s'annule pour $x = \infty$; il existe un polynôme Q_{p0} entier en $\frac{1}{x - a_p}$ et $\frac{1}{y - b_0}$ tel que l'on ait: $(p = 1, 2, \ldots, n)$

$$(6) \qquad \text{mod}\,[\psi_{p0}(x, y) - Q_{p0}] < \frac{\varepsilon}{(n+1)(m+1)} \quad \text{pour } (x, y) \text{ intérieur à } (S, S');$$

4° les mn fonctions $\psi_{pq}(x, y)$ $(p = 1, 2, \ldots, n; q = 1, 2, \ldots, m)$ dont chacune $\psi_{pq}(x, y)$ est régulière pour (x, y) extérieur à $(C_p^1, C_p^{1\prime})$ et s'annule pour $x = \infty$ ainsi que pour $y = \infty$; il existe (proposition VI) un polynôme Q_{pq} entier en $\frac{1}{x - a_p}, \frac{1}{y - b_q}$ tel que à l'extérieur de (C_p, C_q'') et à fortiori à l'intérieur de (S, S'), on ait: $(p = 1, 2, \ldots, n; q = 1, 2, \ldots, m)$

$$(7) \qquad \text{mod}\,[\psi_{pq}(x, y) - Q_{pq}] < \frac{\varepsilon}{(n+1)(m+1)} \quad \text{pour } (x, y) \text{ intérieur à } (S, S').$$

J'imagine écrites les $(m+1)(n+1)$ inégalités analogues à (4), (5), (6)

et (7): elles sont simultanément vérifiées pour (x, y) intérieur à (S, S'); je les additionne en remarquant que $\Sigma\Sigma Q_{pq}$ $(p = 0, 1, 2, \dots, n; q = 0, 1, 2, \dots, m)$ est un polynôme entier en $\frac{1}{x - a_0}, \frac{1}{x - a_1}, \dots, \frac{1}{x - a_n}, \frac{1}{y - b_0}, \frac{1}{y - b_1}, \dots, \frac{1}{y - b_m}$, soit: $Q\left(\frac{1}{x - a_0}, \dots, \frac{1}{x - a^n}, \frac{1}{y - b_0}, \dots, \frac{1}{y - b_m}\right)$ et que, à l'intérieur de (S, S'), on a, d'après l'égalité (3):

$$f(x, y) = \Sigma\Sigma\phi_{pq}(x, y). \qquad (p = 0, 1, 2, \dots, n; q = 0, 1, 2, \dots, m$$

Il vient:

$$\text{mod}\left[f(x, y) - Q\left(\frac{1}{x - a_0}, \frac{1}{x - a_1}, \dots, \frac{1}{x - a_n}, \frac{1}{y - b_0}, \frac{1}{y - b_1}, \dots, \frac{1}{y - b_m}\right)\right] < \varepsilon$$

à l'intérieur de (S, S'). C'est le théorème énoncé.

27. Aux propositions préliminaires qui viennent d'être démontrées, j'ajouterai la suivante, qui est connue.

Proposition VIII. *Soient:*

S et S' deux aires connexes prises sur les plans respectifs des deux variables x et y;

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m, \dots$ une suite indéfinie de nombres positifs formant une série convergente;

$f_1(x, y), f_2(x, y), \dots, f_m(x, y), \dots$ une suite indéfinie de fonctions toutes régulières à l'intérieur de (S, S') et telles que, en tout point (x, y) intérieur à (S, S'), on ait:

$$\text{mod}\,[f_m(x, y)] < \varepsilon_m. \qquad (m = 1, 2, \dots, \infty)$$

Si l'on pose:

$$\Phi(x, y) = \Sigma f_m(x, y) \qquad (m = 1, 2, \dots, \infty)$$

la fonction $\Phi(x, y)$ est régulière à l'intérieur de (S, S').

28. Avant de démontrer le théorème qui est l'objet de cette quatrième partie, il importe de préciser la nature des contours auxquels il s'applique et d'indiquer à leur sujet quelques remarques.

Soit S une aire connexe qui a pour périmètre une ligne fermée connexe L; je suppose d'abord que S soit intérieure à L; L peut présenter des boucles, et peut par conséquent ne pas être un contour fermé

simple; mais je suppose que L puisse être considérée comme la limite d'une suite indéfinie de contours fermés simples $C_1, C_2, \ldots, C_m, \ldots$ tous intérieurs à L et dont chacun enveloppe le précédent; j'entends par là, d'une façon précise, que si A est un point quelconque intérieur à S on peut choisir m assez grand pour que A soit intérieur à C_m.

De même si S est l'aire extérieure à L, je supposerai que L peut être considérée comme la limite d'une suite indéfinie de contours fermés simples $C_1, C_2, \ldots, C_m, \ldots$ enveloppant tous L et dont chacun est enveloppé par le précédent. Dans ces conditions L peut être supposée se réduire à une ligne non fermée, sans boucle, AB, limitée aux points A et B et qui est alors considérée comme un contour fermé indéfiniment aplati; l'aire S extérieure à L comprend dans ce cas tout le plan à l'exclusion des points situés sur AB. D'une façon analogue L pourra être supposée se réduire à un seul point A; l'aire S comprend alors tout le plan à l'exclusion du point A.

Les considérations précédentes s'étendent sans difficulté à une aire à connexion multiple; soit, en effet, S une aire connexe dont le périmètre est composé de $(n+1)$ lignes fermées connexes $L_0, L_1, \ldots, L_n$, dont la première L_0 enveloppe S et dont chacune des n autres est enveloppée par S; chacune des n lignes $L_1, L_2, \ldots, L_n$ peut être supposée réduite à une ligne AB ou à un point unique A, comme il vient d'être expliqué. Je trace le contour fermé simple C_p^0 intérieur à L_0 et enveloppant les n lignes $L_1, L_2, \ldots, L_n$, et je trace n contours fermés simples $C_p^1, C_p^2, \ldots, C_p^n$ dont chacun enveloppe l'une des lignes $L_1, L_2, \ldots, L_n$ et laisse à son extérieur tous les autres contours et lignes tracés. J'appelle S_p l'aire qui à pour périmètre $C_p^1, C_p^2, \ldots, C_p^n$. On suppose que S puisse être considérée comme la limite d'une suite indéfinie d'aires $S_1, S_2, \ldots, S_p, \ldots$ dont chacune S_p est limitée par $(n+1)$ contours fermés simples comme il vient d'être indiqué et dont chacune est complètement intérieure à la suivante; de telle sorte que si A est un point quelconque intérieur à S, il sera aussi intérieur à S_p si p est choisi assez grand.

La ligne L_0 a été supposée fermée; on pourra supposer qu'elle n'est pas une ligne fermée pourvu qu'elle puisse être considérée comme la limite d'une suite de contours fermés simples au sens qui a été donné à cette expression. Par exemple, L_0 pourrait être un cercle de rayon

infini, ou bien encore une hyperbole, en supposant S extérieure à cette hyperbole.

Dans les théorèmes suivants S désigne une aire du plan de la variable x limitée par $(n + 1)$ lignes $L_0, L_1, L_2 \ldots, L_n$ satisfaisant aux conditions précédentes et S désigne une aire du plan de la variable y limitée d'une façon analogue par les $(m + 1)$ lignes $L'_0, L'_1, \ldots, L'_m$.

Théorème XI. *On suppose qu'à chaque point* (a, b) *intérieur à* (S, S') *correspondent:*

1° *deux cercles:* Γ_{ab} *de centre* a *et* $\gamma_{a,b}$ *de centre* b, *respectivement intérieurs à* S *et* S';

2° *une fonction* $f_{ab}(x, y)$ *des deux variables* x *et* y *monotrope et sans espace lacunaire, définie à l'intérieur de* $(\Gamma_{ab}, \gamma_{ab})$ *et telle que si* $(a'b')$ *est un point intérieur à* $(\Gamma_{ab}, \gamma_{ab})$ *la fonction* $f_{ab}(x, y)$ *soit équivalente au point* (a', b') *à la fonction* $f_{a'b'}(x, y)$.

Il existe une fonction $F(x, y)$ *de* x *et* y *monotrope et sans espace lacunaire, définie à l'intérieur de* (S, S') *et équivalente en tout point* (a, b) *intérieur à* (S, S') *à la fonction* $f_{ab}(x, y)$ *correspondant à ce point.*

Théorème XII. *Au lieu de supposer que chacune des fonctions* $f_{ab}(x, y)$ *de l'énoncé précédent est monotrope et sans espace lacunaire, on peut supposer que chacune d'elles* $f_{ab}(x, y)$ *est le logarithme d'une fonction* $v_{ab}(x, y)$ *régulière à l'intérieur de* $(\Gamma_{ab}, \gamma_{ab})$ *et telle que si* (a', b') *est un point intérieur à* $(\Gamma_{ab}, \gamma_{ab})$ *le quotient* $\frac{v_{ab}(x, y)}{v_{a'b'}(x, y)}$ *soit régulier et différent de* 0 *au point* (a', b').

Il existe alors une fonction $F(x, y)$ *définie à l'intérieur de* (S, S') *à un multiple près de* $2i\pi$ *et équivalente en tout point* (a, b) *intérieur à* (S, S') *à la fonction* $f_{ab}(x, y)$.

Démonstration du théorème XI. Soit: $S_1, S_2, \ldots, S_p, \ldots$ la suite indéfinie d'aires ayant pour limite S et dont chacune est composée d'après les indications du précédent paragraphe, et soit $S'_1, S'_2, \ldots, S'_p, \ldots$ la suite analogue ayant pour limite S'.

Chacune des aires (S_p, S'_p) $(p = 1, 2, \ldots, \infty)$ étant intérieure à (S, S'), il existe (théorème I) une fonction de x et y monotrope et sans espace lacunaire, définie à l'intérieur de (S_p, S'_p) et équivalente en tout point intérieur à (S_p, S'_p) à la fonction de l'énoncé correspondant à ce point. Il est clair que l'on obtiendra une nouvelle fonction satisfaisant

aux mêmes conditions que φ_p en retranchant de φ_p une fonction quelconque de x et y régulière à l'intérieur de (S_p, S'_p).

Considérons la différence:

$$\varphi_{p+1} - \varphi_p = \delta_p.$$

δ_p sera une fonction régulière à l'intérieur de (S_p, S'_p).

Soit $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_p, \ldots$ une suite indéfinie de nombres tous positifs formant une série convergente.

Je dis que les fonctions $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_p, \ldots$ peuvent être choisies de telle sorte que l'on ait à l'intérieur de (S_{p-1}, S'_{p-1}):

$$\operatorname{mod}(\delta_p) < \varepsilon_p. \qquad (p = 1, 2, \ldots, \infty)$$

En effet μ étant un entier positif au moins égal à 2, supposons que les $(\mu - 1)$ premiers fonctions $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_\mu, \ldots$ satisfassent à la condition précédente: je vais montrer qu'on peut choisir la fonction $\varphi_{\mu+1}$ de telle sorte qu'elle y satisfasse également.

Il existe, en effet, une fonction $\psi_{\mu+1}$ de x et y monotrope et sans espace lacunaire à l'intérieur de $(S_{\mu+1}, S'_{\mu+1})$ et équivalente en tout point intérieur à $(S_{\mu+1}, S'_{\mu+1})$ à la fonction de l'énoncé correspondant à ce point.

Il faudra prendre pour $\varphi_{\mu+1}$ une fonction équivalente à $\psi_{\mu+1}$ à l'intérieur de $(S_{\mu+1}, S'_{\mu+1})$ et choisie de telle sorte que, à l'intérieur de $(S_{\mu-1}, S'_{\mu-1})$, on ait:

$$\operatorname{mod}[\varphi_{\mu+1} - \varphi_\mu] < \varepsilon_\mu.$$

Je considère pour cela la différence:

$$(1) \qquad \psi_{\mu+1} - \varphi_\mu = \zeta_\mu$$

qui est régulière à l'intérieur de (S_μ, S'_μ).

Je prends alors dans le plan de la variable x sur le périmètre ou à l'extérieur de L_0 un point a_0 à distance finie ou infinie; si L_0 est un cercle de rayon infini ce choix ne peut se faire qu'en prenant pour a_0 le point ∞. Sur le périmètre ou à l'intérieur de chacune des lignes L_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ je prends un point quelconque a_ν; si la ligne L_ν se réduit à un point A, ce choix ne peut se faire qu'en prenant pour a_ν le point A lui même. D'une façon analogue, je prends dans le plan de la variable y les $(m + 1)$ points $b_0, b_1, \ldots, b_m$. Les aires $S_{\mu-1}$ et $S'_{\mu-1}$ sont

limitées, la première par $(n+1)$ contours fermés simples $C^0_{\mu-1}, C^1_{\mu-1}, \ldots, C^n_{\mu-1}$ et la seconde par $(m+1)$ contours simples $C^{0\prime}_{\mu-1}, C^{1\prime}_{\mu-1}, \ldots, C^{m\prime}_{\mu-1}$; les points a_0 et b_0 sont extérieurs respectivement à C^0_μ et $C^{0\prime}_\mu$; $(S_{\mu-1}, S'_{\mu-1})$ est intérieure à (S_μ, S'_μ) et la fonction ζ_μ est régulière à l'intérieur de (S_μ, S'_μ).

Il existe alors (proposition VII) un polynôme P entier en $\frac{1}{x-a_0}$, $\frac{1}{x-a_1}, \ldots, \frac{1}{x-a_n}, \frac{1}{y-b_0}, \ldots, \frac{1}{y-b_m}$ tel que, à l'intérieur de $(S_{\mu-1}, S'_{\mu-1})$, on ait:

$$\operatorname{mod}(\zeta_\mu - P) < \varepsilon_\mu.$$

Je pose:

$$\varphi_{\mu+1} = \psi_{\mu+1} - P.$$

Comme P est une fonction régulière à l'intérieur de (S, S') et à fortiori à l'intérieur de $(S_{\mu+1}, S'_{\mu+1})$ la fonction $\varphi_{\mu+1}$ est équivalente à $\psi_{\mu+1}$ à l'intérieur de $(S_{\mu+1}, S'_{\mu+1})$.

L'égalité (1) devient:

$$\varphi_{\mu+1} - \varphi_\mu = \zeta_\mu - P$$

avec:

$$\operatorname{mod}(\zeta_\mu - P) < \varepsilon_\mu \text{ à l'intérieur de } (S_{\mu-1}, S'_{\mu-1})$$

et en posant:

$$\zeta_\mu - P = \delta_\mu$$

j'aurai:

$$\varphi_{\mu+1} - \varphi_\mu = \delta_\mu$$

avec:

$$\operatorname{mod}(\delta_\mu) < \varepsilon_\mu \text{ à l'intérieur de } (S_{\mu-1}, S'_{\mu-1}).$$

On a ainsi déterminé la fonction $\varphi_{\mu+1}$ satisfaisant aux conditions requises. On déterminera de même de proche en proche la suite indéfinie de fonctions $\varphi_{\mu+2}, \varphi_{\mu+3}, \ldots$.

Je définis une fonction $F(x, y)$ à l'intérieur de (S, S') par la condition suivante: on a, à l'intérieur de (S_p, S'_p) $(p = 2, 3, \ldots, \infty)$

$$F(x, y) = \varphi_{p+1} + \sum_{r=1}^{r=\infty} \delta_{p+r}. \tag{3}$$

On a ainsi une infinité d'expressions de la fonction $F(x, y)$; il faut montrer que chacune d'elles a un sens bien déterminé et que toutes définissent la même fonction.

La série du second membre de (3) est une fonction régulière de x et y à l'intérieur de (S_p, S'_p); car on a, à l'intérieur de (S_p, S'_p), la suite indéfinie d'inégalités:

$$\operatorname{mod}(\delta_{p+r}) < \varepsilon_{p+r}. \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots, \infty)$$

La suite des ε_{p+r} étant une série convergente, il en résulte (proposition VIII) que la série:

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} \delta_{p+r}$$

est une fonction régulière de x et y à l'intérieur de (S_p, S'_p) comme chacun des termes qui la composent.

L'expression (3) a donc un sens bien déterminé; il reste à montrer que deux quelconques des expressions de $F(x, y)$ fournissent la même fonction. Soit (k étant un entier positif) les deux expressions:

$$F(x, y) = \varphi_{p+1} + \sum_{r=1}^{r=\infty} \delta_{p+r}$$

et

$$F(x, y) = \varphi_{p+k+1} + \sum_{r=1}^{r=\infty} \delta_{p+k+r};$$

elles définissent $F(x, y)$ respectivement à l'intérieur de (S_p, S'_p) et (S_{p+k}, S'_{p+k}); elles définissent donc simultanément $F(x, y)$ à l'intérieur de (S_p, S'_p); pour vérifier qu'elles donnent la même fonction il suffit de se rappeler que:

$$\delta_{p+r} = \varphi_{p+r+1} - \varphi_{p+r}.$$

La fonction $F(x, y)$ satisfait aux conditions de l'énoncé. Car si (a, b) est un point quelconque intérieur à (S, S'), on peut prendre p assez grand pour que (a, b) soit intérieur à (S_p, S'_p); dès lors $F(x, y)$ est définie dans le domaine de (a, b) par l'égalité:

$$F(x, y) = \varphi_{p+1} + \sum_{r=1}^{r=\infty} \delta_{p+r}.$$

La série du second membre est une fonction régulière au point (a, b); donc, en ce point, $F(x, y)$ est équivalente à $\varphi_{\mu+1}$ et par suite à la fonction $f_{ab}(x, y)$ de l'énoncé.

Démonstration du théorème XII. Elle est analogue à la précédente avec cette différence que les fonctions $F(x, y)$, φ, ψ ne sont définies qu'à un multiple près de $2i\pi$; il n'en est pas de même des fonctions δ dont chacune est définie sans ambiguïté. On sera en effet conduit comme pour la démonstration précédente à poser:

$$\psi_{\mu+1} - \varphi_\mu = \zeta_\mu.$$

On prendra pour ζ_μ l'une quelconque des déterminations de la différence $\psi_{\mu+1} - \varphi_\mu$; chacune de ces déterminations est une fonction régulière dans (S_μ, S'_μ); le polynôme P se détermine comme précédemment et l'on pose:

$$\delta_\mu = \zeta_\mu - P;$$

δ_μ est ainsi définie sans ambiguïté.

29. Du théorème précédent on déduit les deux suivants par un mode de raisonnement déjà donné.

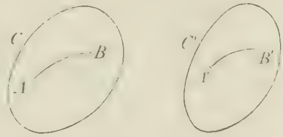
Théorème XIII. *Il existe une fonction $V(x, y)$ régulière en tout point (a, b) intérieur à (S, S') et telle que le quotient $\frac{v_{ab}(x, y)}{V(x, y)}$ soit régulier et différent de o au point (a, b).*

Théorème XIV. *Si une fonction $\Phi(x, y)$ n'admet à l'intérieur de (S, S') que des singularités non essentielles, elle est le quotient de deux fonctions W et V régulières à l'intérieur de (S, S') et telles que la fonction obtenue est irréductible à l'intérieur de (S, S').*

Il est à remarquer que dans l'énoncé précédent aucune hypothèse n'est faite sur la nature des singularités que peut admettre $\Phi(x, y)$ sur le périmètre de (S, S'); ce périmètre peut être une ligne de points singuliers essentiels pour la fonction $\Phi(x, y)$.

30. Je signale un cas particulier du théorème précédent pour montrer un exemple de l'application qu'on peut en faire.

Soient C et C' deux contours fermés simples pris respectivement sur les plans des deux variables x et y; AB une ligne sans boucle intérieure à C et limitée aux points A et B; $A'B'$ une ligne analogue intérieure



à C'; soit $\Phi(x, y)$ une fonction de x et y qui n'admet à l'intérieur de C et C' que des singularités non essentielles; excepté sur les lignes AB, $A'B'$ qui peuvent être des lignes de points singuliers essentiels. En considérant AB et $A'B'$ comme des contours fermés indéfiniment aplatis, le théorème précédent, appliqué à cet exemple, montre que $\Phi(x, y)$ est le quotient de deux fonctions régulières à l'intérieur de C et C', sauf sur les lignes AB et $A'B'$.

31. Je me suis borné dans cette quatrième partie, pour éviter des complications de notations qui m'ont paru inutiles, à considérer le cas de deux variables complexes. Les mêmes démonstrations s'étendent sans aucune difficulté au cas de n variables complexes.

Caen, le 28 octobre 1893.

ÜBER DIE DOPPELCURVE AUF DEN GERADLINIGEN FLÄCHEN

VON

A. WIMAN

in LUND.

1. Auf einer Regelfläche existirt bekanntlich stets eine Doppelcurve, welche jeder Erzeugenden in $n-2$ Punkten begegnet. Andere besonders auffallenden Gebilde auf der Fläche sind die Torsalen, d. h. Erzeugenden, welche von einer benachbarten getroffen werden; die Ebene dieser Linien berührt längs der ganzen Torsale, und ihr Schnittpunkt, der Torsal- oder Cuspidalpunkt, ist gemeinsamer Berührungspunkt jeder anderen Ebene durch die Torsale.

Bei der Untersuchung der Regelflächen hat man sich nun besonders mit der Doppelcurve und den Torsalen beschäftigt.[1] Ich habe in meiner Gradualdissertation gezeigt, wie diese Aufgabe, wenn die Fläche zu einem Tetraedralcomplexe (oder noch besser zu einem Abarte dieses Complexes)

---

[1] So ist die Theorie der Regelflächen 4. Grades von CHASLES, CAYLEY, SCHWARZ, CREMONA und ROHN behandelt worden. Vgl. auch SALMON-FIEDLER, *Analytische Geometrie des Raumes*, 2. Theil, 3. Auflage, S. 430, und STURM, *Die Gebilde* 1. *und* 2. *Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung*, 1. Theil (Leipzig 1892), S. 52. Eine Eintheilung der Regelflächen 5. Grades nach der Natur der Doppelcurve hat SCHWARZ gegeben, (Crelle's Journal, Bd. 67). Dieselbe Aufgabe bezüglich den Regelflächen 6. Grades haben dann BERGSTEDT (*Om regelytor af* 6. *graden*, Diss., Lund 1886) und FINK (*Über windschiefe Flächen im Allgemeinen und ins besondere über solche* 6. *Grades*, Diss. Aus dem Correspondenzblatt für die Gelehrten und Realschulen Würtembergs 1887) angegriffen; doch mit wenig Erfolg, es seien denn die Irrthümer des Letzterwähnten. Die vollständige Lösung habe ich in meiner im Texte besprochenen Arbeit (*Klassifikation af regelytorna af* 6. *graden*, Lund 1892) gegeben, deren Ergebnisse nächstens in diesen Acta dargelegt werden sollen.

gehört, auf die Untersuchung einer viel einfacheren Curve in Bezug auf einen Tetraedralcomplex (oder Abart desselben) reducirt werden kann. Diese Methode lässt sich für alle Regelflächen 6. Grades durchführen, weil der genannte Complex durch 13 Geraden gelegt werden kann, und somit jede R_6 zu einer (wohl im Allgemeinen endlichen) Zahl von Tetraedralcomplexen gehört.

In der vorliegenden Abhandlung will ich aber Bedingungen entwickeln, denen die Doppelcurve einer Regelfläche beliebigen Grades genügen muss. Die so erhaltenen möglichen Arten der Doppelcurve auf einer R_6 kommen sämmtlich vor, wie ich in der citirten Arbeit erwiesen habe. Somit lässt sich schliessen, dass man auch für die Regelflächen höheren Grades eine ziemlich gute Begrenzung der Möglichkeiten erhalten.

2. Zu diesem Zwecke suche ich zuerst mittelst der Theorie der reciproken Flächen allgemeine Formeln für die Zahl t_3 der dreifachen Punkte einer Regelfläche sowie für das Geschlecht P ihrer Doppelcurve zu entwickeln.[1] Es seien:

n Grad (Ordnung und Klasse zugleich) der Fläche.

a Ordnung des Tangentenkegels von einem Punkte an die Fläche oder Klasse eines Querschnitts der Fläche.

δ Zahl der Doppelkanten des Kegels oder der Doppeltangenten des Querschnitts.

$\varkappa$ Zahl der Rückkehrkanten des Kegels oder der Inflexionen des Querschnitts.

b die Ordnung der Doppelcurve.

D die Zahl der Punkte, in denen 2 Erzeugende mit gemeinsamer Berührungsebene zusammentreffen, und die Doppelcurve somit einen Doppelpunkt erhält; weil 2 Bedingungen bei einem solchen Punkte der Doppelcurve erfüllt sein müssen, lässt sich schliessen, dass es im Allgemeinen keine D giebt.

t_m $(m \geq 3)$ die Zahl m-facher Punkte der Fläche; die m Mäntel

[1] Die entsprechende Aufgabe betreffend den (in dieser Hinsicht wegen der Cuspidalcurve nicht als Specialfällen der allgemeinen Regelflächen zu behandelnden) abwickelbaren Flächen ist schon von CAYLEY (Quarterly Journal, Bd. 11) gelöst worden.

schneiden einander in $\frac{1}{2}m(m-1)$ Doppelcurvenzweigen. Es ist einleuchtend, dass es im Allgemeinen nur t_3 giebt.

τ die Zahl der Torsalpunkte.

ρ die Klasse der entwickelbaren Fläche, die von den Tangentialebenen längs der Doppelcurve gebildet wird.

p das Geschlecht der Regelfläche.

Übrigens sei angenommen, dass keine Cuspidalerzeugende und nur eine endliche Zahl von t_m (also keine mehrfachen Curven) vorkommen.

Die PLÜCKER'schen Gleichungen, denen die Querschnittscurve genügen muss, sind:

$$b = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - p, \tag{1}$$

$$a = 2(n-1) + 2p, \tag{2}$$

$$\varkappa = 3(n-2) + 6p, \tag{3}$$

$$\delta = 2p^2 + 2p(2n-7) + 2(n-2)(n-3). \tag{4}$$

Die Bestimmung der Schnittpunkte der 2. Polarfläche eines beliebigen Punktes mit der Berührungscurve des Tangentenkegels von demselben Punkte und mit der Doppelcurve giebt die Gleichungen:[1]

$$a(n-2) = \varkappa + \rho, \tag{5}$$

$$b(n-2) = \rho + \sum \frac{1}{2} m(m-1)(m-2)t_m. \tag{6}$$

Daraus folgt

$$\sum \frac{1}{2} m(m-1)(m-2)t_m = \frac{1}{2}(n-2)(n-3)(n-4) - 3p(n-4). \tag{I}$$

Also

$$p \leqq \frac{1}{6}(n-2)(n-3). \tag{II}$$

---

[1] Vgl. SALMON-FIEDLER, *Geometrie des Raumes*, II, S. 650.

Im Allgemeinen hat somit eine Regelfläche

$$\frac{1}{6}(n-2)(n-3)(n-4)-p(n-4)$$

dreifache Punkte. Aber es kann ein m-facher Punkt $\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)$ dreifache ersetzen; es stossen ja auch in ihm eben so viele Gruppen von je 3 Erzeugenden zusammen.

Die erhaltenen Ergebnisse (I) und (II) werden von etwa auftretenden Cuspidalerzeugenden nicht gestört; da dies wohl schon a priori einleuchtet, übergehen wir den nach den SALMON'schen Principen leicht zu führenden Beweis. Dagegen lässt sich die Ungleichung (II) nicht erweisen, wenn die Regelfläche sowohl eine mehrfache Curve als eine mehrfache Developpable besitzt, und Regelflächen mit solchen Singularitäten gehen nicht immer als Specialfälle anderer *desselben Grades* hervor, was den fehlenden Beweis durch Continuitätsbetrachtungen hätte ersetzen können.

Das Geschlecht P der Doppelcurve ist durch die Gleichung

$$P=\frac{1}{2}(b-1)(b-2)-k-D-\sum\frac{1}{8}(m+1)m(m-1)(m-2)t_m$$

bestimmt, wo k die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte bezeichnet. k kann aus 2 neuen Gleichungen ermittelt werden:[1]

$$(7)\qquad a(n-2)(n-3)=2(\delta+ab-2\rho-\tau),$$

$$(8)\qquad b(n-2)(n-3)=ab-2\rho-\tau-4\left[k+\sum\frac{1}{8}m(m-1)(m-2)(m-3)t_m\right].$$

Aus (7) erhalten wir die bekannte von LÜROTH gegebene Zahl der Torsalen: $2(n-2)+4p$. Ganz einfach ergiebt sich

$$(\mathrm{III})\qquad P=\frac{1}{2}(n-3)(n-4)+p(n-5)-D.$$

[1] Die Gleichungen (7) und (8) enthalten die Analyse der Durchschnittspunkte der Curven a, b mit der Fläche von der $(n-2)(n-3)$ Ordnung, welche die Berührungspunkte der doppelt berührenden Erzeugenden des Tangentenkegels ausschneidet, und sind nach den Gleichungen (10) und (11) in SALMON-FIEDLER's citirter Arbeit, S. 671, gebildet; weil aber dort nur t_3 angenommen sind, habe ich selbst in (8) berücksichtigen müssen, dass in einem m-fachen Punkte $\frac{1}{8}m(m-1)(m-2)(m-3)$ Paare von je 2 Erzeugenden zusammenstossen.

Wenn die Gleichung (I) besteht (entweder für die Fläche selbst oder nur für ihre Reciproke), können höchstens $\frac{1}{6}(n-2)(n-3)-p$ doppelte Erzeugende vorkommen, weil, wie man leicht findet, jede Doppellinie von $(n-4)$ anderen Erzeugenden in eben so vielen t_3 getroffen wird; und, wenn 2 Doppelgeraden zusammentreffen, vereinigen sich im gemeinsamen Punkte sowohl 4 t_3 als 4 der erwähnten Schnittpunkte. Also, wenn die angegebene Zahl doppelter Erzeugenden existirt, liegen alle mehrfachen Punkte auf ihnen. Allein es soll hervorgehoben werden, dass unter diesen doppelten Erzeugenden gelegentlich auch solche vorkommen können, welche die Ordnung der restirenden Doppelcurve um 2 reducirt: es sind diese aus 2 einander berührenden Torsalen mit verschiedenen Cuspidalpunkten zusammengesetzt; die reciproken Torsalen haben verschiedene Ebenen und gemeinsame Torsalpunkte und liefern somit nur Doppelpunkte im Querschnitte.[1]

Auf jeder doppelten Erzeugenden befinden sich 2 D: die Punkte, wo die beiden Mäntel einander berühren. Weil aber gleichzeitig die Doppelgerade aus der Doppelcurve ausgeschieden wird, reducirt sich P nur um je eine Einheit.

Man kann nun die beiden in eine Doppelgerade zusammenfallenden Erzeugenden durch eine sehr kleine Veränderung auseinandergehen denken, ohne dass die Regelfläche anderwärts wesentlich verändert sei. Die Regelfläche mit der doppelten Geraden erscheint so als Specialfall einer Fläche eines um eine Einheit höheren Geschlechtes ohne dieselbe, somit auch ohne die darauf befindlichen $n-4$ t_3; die Doppelcurve hatte in diesen $n-4$ Doppelpunkte, deren Wegfall P um $n-4$ erhöht. Durch diese Betrachtungen werden die Gleichungen (I) und (III) bestätigt.

Es erübrigt noch die Fälle von Berührungs- und Oskulations-Doppelcurven zu erwähnen. Im ersten Falle berühren 2 Mäntel einander längs der Curve; im zweiten oskuliren sie einander sogar, so dass die Erzeugende des einen Mantels zweite Haupttangente des anderen sein muss.[2]

---

[1] Beispiele und nähere Erörterungen solcher Singularitäten werden wir später bei Behandlung der Regelflächen 6. Grades geben.

[2] Als eine hieher gehörende Art nenne ich die von SCHWARZ besprochene Regelflächen 5. Grades mit 3 doppelten Kegelschnitten. Ich habe nämlich (*Klassifikation* etc., S. 87) erwiesen, dass sowohl 2 als auch alle 3 Kegelschnitte in speciellen Fällen unmittelbar aufeinander folgen.

Die Regelflächen 6. Grades ohne vielfache Curven sind somit vom Geschlechte 0, 1 oder 2, haben höchstens 2, bezw. 1 oder 0 doppelte Erzeugende, und die bezügliche obere Grenze des Geschlechts der Doppelcurve ist 3, 4 oder 5. Von den möglichen vielfachen Curven behandeln wir besonders die Leitgeraden. Die anderen Fälle sind: dreifache Erzeugende, dreifaches Kegelschnitt und dreifache gewundene C_3; im ersten Falle muss jede Ebene durch die dreifache Erzeugende einen Doppelcurvenpunkt enthalten (somit, weil die Schnittcurve eine C_3, $p=0$); im zweiten soll von jedem Punkte des Kegelschnittes drei Bisecanten der restirenden Doppelcurve ausgehen, welche somit eine unicursale gewundene C_4 specieller Art sein muss (also auch hier $p=0$); im dritten Falle ist gewöhnlich $p=1$.

3. Die Gleichungen (2) und (3) werden nicht durch eine r-fache Leitgerade verändert. Als b-Curve sei nur der restirende Theil der Doppelcurve bezeichnet. Also

$$(1') \qquad b = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \frac{1}{2}r(r-1) - p.$$

Die Formeln (5) und (6) werden bedeutend modificirt. Der 2. Polare ist die Leitgerade $(r-2)$-fach. Dort geht die a-Curve durch $2(r+p-1)$ Torsalpunkte[1] und durch $n-r$ andere Punkte, wo die Leitgerade von den Erzeugenden getroffen wird, welche in der durch die Scheitel des Berührungskegels und die Directrix bestimmten Ebene liegen. In diesen Punkten wird aber auch die 2. Polare von derselben Ebene berührt oder (wenn $r=2$) geht wenigstens dadurch, so dass jeder $r-1$ Schnittpunkte giebt.

Die b-Curve hat $b-\frac{1}{2}(n-r)(n-r-1)$ Punkte auf der Leitgerade; denn jede Ebene durch diese enthält nur $\frac{1}{2}(n-r)(n-r-1)$ andere b-Punkte als Schnittpunkte der in ihr liegenden Erzeugenden.

[1] Dass die erwähnte Zahl Torsalpunkte auf der Leitgerade liegt, wird im nächsten Paragraphen erwiesen.

Also

$$(5') \quad a(n-2) = \varkappa + \rho + 2(r+p-1)(r-2) + (n-r)(r-1),$$

$$(6') \quad b(n-2) = \rho + (r-2)\left[b - \frac{1}{2}(n-r)(n-r-1)\right] + \sum \frac{1}{2} m(m-1)(m-2)t_m.$$

Dies giebt

$$(\mathrm{I}') \quad \sum \frac{1}{2} m(m-1)(m-2)t_m = \frac{1}{2}(n-r-2)[(n-r-1)(n+2r-6)-6p].$$

Daraus folgt, dass, wenn $r < n-2$,

$$(\mathrm{II}') \qquad p \leqq \frac{1}{6}(n-r-1)(n+2r-6).$$

Wenn $r = n-2$, verschwinden beide Glieder der Gleichung (I'); die b-Curve kann ein Kegelschnitt sein und somit p den Werth $n-4$ erreichen.

Entsprechende Überlegungen lassen sich auch für die reciproke Fläche (wo r durch $n-r$ ersetzt wird) durchführen, wenn nur die Ursprüngliche keine vielfache Developpable (ausser etwa des Ebenenbüschels durch die Leitgerade) besitzt. Unter dieser Voraussetzung kann somit r in (II') durch $n-r$ ersetzt werden, welches einen genaueren Werth für p liefert, wenn $r < \frac{n}{2}$.

Ganz einfach ergiebt sich das Geschlecht P' aus der Correspondenz zwischen den Punkten der b-Curve und den Erzeugenden der Regelfläche: jedem Punkte entsprechen die 2 durch ihn gehenden Erzeugenden, und jede Erzeugende trifft $n-r-1$ Punkte, welche ihm entsprechen. Ausserhalb der Leitgeraden befinden sich $2(n-r+p-1)$ Torsalpunkte; ihnen entsprechen coincidirende Erzeugende. In der Ebene jeder der gedachten Torsalen liegen $n-r-2$ andere Erzeugende, deren jede 2 coincidirende b-Punkte auf der Torsale ausschneidet. Dies giebt

$$2(n-r-2)(n-r+p-1)$$

Coincidenzen, welche Zahl indess mit 4 vermindert wird, so oft 2 Tor-

salen dieselbe Ebene haben, denn es entsteht dann ein Doppelpunkt D im Schnittpunkte. Dann kann P' aus ZEUTHEN's Gleichung[1]

$$c - c' = 2e'(p - 1) - 2e(P' - 1)$$

hergeleitet werden, welche die bekannte Relation zwischen den Geschlechtszahlen zweier einander entsprechenden Curven darstellt. Diese Gleichung gilt aber natürlich noch, wenn die Punkte der einen Curve eindeutig auf die Geraden einer Regelfläche überführt werden. Also ist hier:

$$e = 2, \qquad e' = n - r - 1, \qquad c = 2(n - r + p - 1),$$
$$c' = 2(n - r - 2)(n - r + p - 1) - 4D,$$

woraus

$$\text{(III')} \qquad P' = \frac{1}{2}(n - r - 2)(n - r - 3) + p(n - r - 2) - D.$$

Für $r = n - 2$ bezw. $n - 3$, ergiebt sich $P' = 0$ bezw. p, wie auch zu erwarten war. P' wird nicht durch das Auftreten einer doppelten Erzeugenden reducirt, denn die beiden Mäntel berühren einander nur in einem *neu hinzutretenden* Doppelpunkte; der andere ist auf der Directrix.

Die Regelflächen 6. Grades mit einer einfachen oder fünffachen Leitgerade sind natürlich immer unicursal. In den übrigen Fällen ($r = 2, 3, 4$) kann das Geschlecht höchstens den Werth 2 erreichen;[2] es sei denn, dass auch eine 2. Leitgerade auftrete. Wenn $r = 2$, lehrt die Gleichung (III'), dass $P' \overline{<} 1, 3, 5$, je nachdem $p = 0, 1, 2$.

4. Die oberwähnte Gleichung ZEUTHEN's kann auch benutzt werden, um die Anzahl der Torsalpunkte τ' auf einer r-fachen Curve zu ermitteln, welcher jede Erzeugende nur in einem Punkte begegnet. In der Gleichung

$$c - c' = 2e'(p - 1) - 2e(p' - 1)$$

[1] Math. Ann., Bd. 3.

[2] FINK glaubt indess 6 Arten vom Geschlechte 3 ohne 2 Leitgeraden erhalten zu haben. Er geht aber von der unrichtigen Voraussetzung aus, dass eine *eindeutige* Correspondenz zwischen den einfachen Schnittpunkten einer beweglichen Tangente einer ebenen C_4 vom Geschlechte 3 bestehen könne. Durch einen Punkt gehen ja 10 anderwärts berührende Geraden.

hat man somit $c = 0$, $c' = \tau'$, $e' = r$, $e = 1$ zu setzen, wenn $p(p')$ das Geschlecht der Curve (der Regelfläche) bezeichnet. Also

$$\tau' = 2(p' - rp + r - 1).$$

Aus dem Umstande, dass $\tau' \geq 0$, ergiebt sich eine obere Grenze für p, und zwar ist ersichtlich, dass, wenn $r > p' - 1$, nur 2 Lösungen möglich sind:

$$p = 0, \qquad \tau' = 2(r + p' - 1);$$
$$p = 1, \qquad \tau' = 2(p' - 1).$$

Jedoch giebt es nur die Lösung $p = 0$, wenn $p' = 0$.

Weil auf einer Erzeugenden $n - 2$ Doppelcurvenpunkte sich befinden, kann die Doppelcurve in höchstens $n - 2$ verschiedene zerfallen. Trifft dies bei einer rationalen Regelfläche ein, müssen jene $n - 2$ Curven auch unicursal und auf jeder 2 Torsalpunkte belegen sein. Wenn aber $p' = 1$, sind die Curven entweder vom Geschlechte 1 mit keinem oder unicursal mit 4 Torsalpunkten. Weil die gesammte Zahl der Torsalen $2n$ ist, müssen $\frac{n}{2}$ Curven dieser Art sein; somit ist es eine nothwendige Bedingung des Zerfallens, dass n gerade. Es können aber auch höchstens 3 solche Doppelcurven vom Geschlechte 1 vorkommen, denn auf einer ebenen C_3 können die Punkte nur auf 3 Weisen involutorisch-eindeutig einander zugeordnet werden, so dass die Verbindungsgerade entsprechender Punkte eine Curve vom Geschlechte 1 enveloppirt.[1] Zwischen den Erzeugenden der Regelfläche ($p' = 1$) bestehen also nur 3 solche Correspondenzen, und es mag wohl möglich sein, dass es Fälle giebt, in welchen jedes Paar entsprechender Erzeugenden in jeder der 3 Correspondenzen zusammentreffe.[2]

Auf den Regelflächen höheren Geschlechtes kann nur eine jeder Erzeugenden in nur einem Punkte begegnende rationale Doppelcurve vorkommen; die in derselben zusammenstossenden Erzeugenden sind einander wie die ausgezeichneten Punktpaare auf den ebenen hyperelliptischen Curven zugeordnet.

---

[1] Siehe Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen über die Geometrie der Ebene,* S. 527, 607.

[2] Fink will zwar (S. 15 seiner schon erwähnten Arbeit) eine rationale R_6 entdeckt haben, zu deren Doppelcurve auch eine ebene C_3 vom Geschlechte 1 gehört. Eine solche fatale Entdeckung kann aber nur als Probe seiner unbefriedigenden Methode gelten.

SUR LES EXPRESSIONS ALGÉBRIQUES

PAR

D. SÉLIVANOFF

à S:t PÉTERSBOURG.

Dans le mémoire posthume *sur la résolution algébrique des équations* ABEL a démontré quelques théorèmes sur les expressions algébriques satisfaisant à l'équation proposée. Les démonstrations d'ABEL ont été complétées et simplifiées par MALMSTEN, KRONECKER et M. SYLOW. Je veux ici reprendre cette question en employant les notations de KRONECKER (Monatsberichte der Berliner Akademie, 1879) et en introduisant quelques modifications et simplifications.

Avant d'aborder la question il est nécessaire de démontrer quelques théorèmes sur les fonctions irréductibles.

§ 1. Pour rendre la rédaction un peu plus simple, supposons que le domaine de rationalité contienne tous les nombres rationnels. Nous indiquerons dans la suite chaque fois quand ce domaine sera élargi après l'adjonction des différentes quantités.

Soit

$$\varphi(t) = 0$$

une équation irréductible, dont les racines sont

$$t_1, t_2, \ldots, t_m.$$

Nous supposons connu le théorème:

Si une fonction entière $F(t)$ avec des coefficients rationnels s'annule pour $t = t_1$, on a

$$F(t) = \varphi(t)\psi(t)$$

et par conséquent

$$F(t_2) = 0, \qquad F(t_3) = 0 \; ; \quad \ldots \; , \quad F(t_m) = 0.$$

Ce théorème a aussi lieu, si les coefficients de la fonction $F(t)$ contiennent des quantités dont l'adjonction n'altère pas l'irréductibilité de l'équation $\varphi(t) = 0$.

Nous allons démontrer les cinq théorèmes suivants.

I. *Si une fonction entière $\Phi(x\,,t_1)$ est irréductible après l'adjonction de t_1, la fonction $\Phi(x\,,t_k)$ est aussi irréductible après l'adjonction de t_k, k ayant une des valeurs* $2\,,3\,,\ldots,m$.

Supposons qu'on ait

$$\Phi(x\,,t_k) = \Phi_1(x\,,t_k)\,.\,\Psi_1(x\,,t_k).$$

En remplaçant t_k par la racine t_1 de l'équation irréductible $\varphi(t) = 0$ on obtient la relation impossible

$$\Phi(x\,,t_1) = \Phi_1(x\,,t_1)\,.\,\Psi_1(x\,,t_1),$$

$\Phi(x\,,t_1)$ étant une fonction irréductible.

II. *Le produit*

$$\Phi(x\,,t_1)\Phi(x\,,t_2)\ldots\Phi(x\,,t_m)$$

est irréductible, s'il ne contient pas de racines multiples et si la fonction $\Phi(x\,,t_1)$ est irréductible après l'adjonction de t_1.

Le produit

$$\Phi(x\,,t_1)\Phi(x\,,t_2)\ldots\Phi(x\,,t_m) = \mathfrak{F}(x) \tag{1}$$

est une fonction entière en x avec des coefficients rationnels. En décomposant cette fonction en facteurs irréductibles on trouve

$$\mathfrak{F}(x) = \mathfrak{F}_1(x)\mathfrak{F}_2(x)\ldots\mathfrak{F}_\mu(x). \tag{2}$$

La fonction $\mathfrak{F}_1(x)$ a des racines communes avec une fonction irréductible $\Phi(x\,,t_k)$, k ayant une des valeurs $1\,,2\,,3\,,\ldots,m$.

Donc

$$\mathfrak{F}_1(x) = \Phi(x, t_k) . \Psi(x, t_k)$$

et à cause de l'irréductibilité de l'équation $\varphi(t) = 0$ on a les relations suivantes

$$(3) \qquad \begin{cases} \mathfrak{F}_1(x) = \Phi(x, t_1) . \Psi(x, t_1), \\ \mathfrak{F}_1(x) = \Phi(x, t_2) . \Psi(x, t_2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathfrak{F}_1(x) = \Phi(x, t_m) . \Psi(x, t_m). \end{cases}$$

Les relations (1) et (3) indiquent que chaque racine de $\mathfrak{F}(x)$ annule $\mathfrak{F}_1(x)$. Il suit de la relation (2) que chaque racine de $\mathfrak{F}_1(x)$ annule $\mathfrak{F}(x)$.

Les mêmes conclusions sont applicables aux fonctions $\mathfrak{F}_2(x)$, $\mathfrak{F}_3(x)$, $\dots$, $\mathfrak{F}_\mu(x)$. Donc

$$\mathfrak{F}(x) = [\mathfrak{F}_1(x)]^\mu$$

et par conséquent

$$(4) \qquad \Phi(x, t_1)\Phi(x, t_2) \dots \Phi(x, t_m) = [\mathfrak{F}_1(x)]^\mu.$$

Si le produit

$$\Phi(x, t_1)\Phi(x, t_2) \dots \Phi(x, t_m)$$

n'a pas de racines multiples, le nombre μ est nécessairement égal à *un* et le théorème énoncé est donc démontré.

M. Frobenius m'a communiqué que la relation (4) se trouve dans un mémoire de Schönemann (Journal de Crelle, t. 31, p. 273). M. Kneser a donné une autre démonstration de cette relation (Mathematische Annalen, t. 30, p. 181).

Supposons qu'une fonction irréductible $f(x)$ devienne réductible après l'adjonction de t_1, c'est à dire que

$$f(x) = \Phi(x, t_1) . \Psi(x, t_1),$$

$\Phi(x, t_1)$ étant une fonction irréductible.

Dans ce cas l'équation (4) prend la forme

$$\Phi(x, t_1)\,\Phi(x, t_2) \dots \Phi(x, t_m) = [f(x)]^\mu.$$

Les degrés des fonctions $f(x)$ et $\Phi(x, t_1)$ étant n et ν on a la relation

$$m\nu = n\mu.$$

Si n est un nombre premier, il est nécessaire que m soit multiple de n, ν étant plus petit que n.

On peut donc affirmer que

III. *La fonction irréductible du degré premier n ne peut devenir réductible qu'après l'adjonction d'une racine d'une équation irréductible dont le degré est multiple de n.*

La racine du degré n de l'unité satisfait à une équation irréductible dont le degré est inférieur à n. On a donc ce corollaire du théorème III:

La fonction irréductible du degré premier n reste encore irréductible après l'adjonction d'une racine du degré n de l'unité.

Le théorème II peut prendre une autre forme, si la fonction irréductible $\varphi(t)$ a la forme

$$\varphi(t) = t^m - a,$$

m étant un nombre premier.

L'irréductibilité de cette fonction ne sera pas alterée après l'adjonction de ω, racine de l'équation

$$\frac{z^m - 1}{z - 1} = 0.$$

Supposons que la fonction $\Phi(x, t_1)$ reste irréductible après l'adjonction de ω.

Nous allons démontrer que les fonctions $\Phi(x, t_1)$ et $\Phi(x, t_k)$, k ayant une des valeurs $2, 3, \ldots, m$, ne peuvent pas avoir des racines communes, si elles ne sont pas identiques.

Supposons que le plus grand commun diviseur des fonctions $\Phi(x, t_1)$ et $\Phi(x, t_k)$ soit $\Psi(x, t_1, t_k)$.

Une des quantités t_1 et t_k s'exprime par l'autre au moyen de ω. On peut donc écrire

$$\Psi(x, t_1, t_k) = \Psi_1(x, t_1) = \Psi_2(x, t_k).$$

Les fonctions $\Psi_1(x, t_1)$ et $\Psi_2(x, t_k)$ divisent les fonctions irréductibles $\Phi(x, t_1)$ et $\Phi(x, t_k)$. Donc

$$\Psi(x, t_1, t_k) = \Phi(x, t_1) = \Phi(x, t_k).$$

(On suppose que le coefficient de la plus haute puissance de x dans $\Phi(x, t_1)$ soit égal à un.)

Par conséquent le produit

$$\Phi(x, t_1)\Phi(x, t_2) \ldots \Phi(x, t_m)$$

ne peut pas contenir des racines multiples, si les fonctions

$$\Phi(x, t_1), \Phi(x, t_2), \ldots, \Phi(x, t_m)$$

sont différentes entre eux.

On a donc le théorème:

IV. *Le produit*

$$\Phi(x, t_1)\Phi(x, t_2) \ldots \Phi(x, t_m) = \mathfrak{F}(x)$$

est irréductible, si les fonctions

$$\Phi(x, t_1), \Phi(x, t_2), \ldots, \Phi(x, t_m)$$

sont différentes entre eux.

Les nombres $t_1, t_2, \ldots, t_m$ sont ici les racines de l'équation irréductible du degré premier

$$t^m - a = 0.$$

La fonction $\Phi(x, t_1)$ est supposée irréductible après l'adjonction de t_1 et ω, racine de l'équation $\frac{z^m - 1}{z - 1} = 0$.

Nous appliquerons encore le théorème suivant d'Abel:

V. *Si dans le domaine de rationalité donné l'équation du degré premier*

$$t^m - a = 0$$

est réductible, cette équation a nécessairement au moins une racine contenue dans le même domaine de rationalité.

Supposons que la fonction $t^m - a$ soit divisible par

$$\Psi(t) = t^p - b_1 t^{p-1} + b_2 t^{p-2} - \ldots + (-1)^r b_p.$$

Le nombre b_p appartenant au domaine de rationalité donné est le produit des racines de l'équation $\Psi(t) = 0$. Donc

$$b_p = a^{\frac{p}{m}} e^{\frac{2h\pi}{m} i},$$

h étant un nombre entier.

Déterminons deux nombres entiers r et s de manière qu'on ait

$$pr - ms = 1.$$

On aura la relation

$$(b_p^r a^{-s})^m = a$$

et par conséquent le théorème est démontré.

Si le domaine de rationalité contient ω, toutes les racines de l'équation réductible

$$t^m - a = 0$$

sont rationnelles.

§ 2. On sait que chaque expression formée avec des radicaux peut être mise sous la forme

$$F(V_1, V_2, \ldots, V_\nu),$$

F étant une fonction entière de $V_1, V_2, \ldots, V_\nu$ avec des coefficients rationnels. Les quantités sont réunies par les relations

$$(1) \quad \begin{cases} V_1^{n_1} = F_1(V_2, V_3, \ldots, V_\nu), \\ V_2^{n_2} = F_2(V_3, V_4, \ldots, V_\nu) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ V_{\nu-1}^{n_{\nu-1}} = F_{\nu-1}(V_\nu), \\ V_\nu^{n_\nu} = A, \end{cases}$$

où les exposants $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ sont des nombres premiers; $F_1, F_2, \ldots, F_{\nu-1}$ sont des fonctions entières avec des coefficients rationnels des arguments indiqués et A est un nombre rationnel.

L'équation

$$V^{n_\nu} = A$$

a n_ν racines. Une de ces racines est choisie arbitrairement et désignée par V_ν.

Une des racines de l'équation

$$V^{n_{\nu-1}} = F_{\nu-1}(V_\nu)$$

est désignée par $V_{\nu-1}$ et ainsi de suite.

De cette manière tous les radicaux $V_1, V_2, \ldots, V_\nu$ obtiennent des valeurs déterminées: nous désignons par x_1 la valeur de l'expression algébrique qui en résulte.

Donc

$$(2) \qquad x_1 = F(V_1, V_2, \ldots, V_\nu).$$

Soient

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu$$

les racines primitives de l'unité des degrés

$$n_1, n_2, \ldots, n_\nu.$$

Si l'équation

$$V^{n_\nu} = A$$

est réductible, la quantité V_ν est rationnelle, ou bien V_ν est exprimable rationnellement par ω_ν. Dans les deux cas V_ν peut être exclue de la *chaîne* des équations (1) et au lieu de V_ν ces équations peuvent contenir ω_ν.

Si cette équation est irréductible on pourra encore adjoindre ω_ν sans altérer l'irréductibilité de cette équation.

Si l'équation

$$V^{n_{\nu-1}} = F_{\nu-1}(V_\nu)$$

est réductible après l'adjonction de V_ν et ω_ν, on pourra exclure le radical $V_{\nu-1}$ des équations de la chaîne (1).

Après avoir exclu de cette manière tous les radicaux *superflus,* nous obtenons un nouveau système d'équations binômes contenant quelques-unes des racines de l'unité $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu$. Exprimons ces racines par

des radicaux et éloignons de nouveau les radicaux superflus. Dans la chaîne des équations (1) pourront entrer les racines de l'unité, dont les degrés sont inférieurs à $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$. Ces racines de l'unité, nous les exprimerons de nouveau par des radicaux.

Cette opération sera enfin terminée, car la chaîne finale des équations binômes ne peut contenir que quelques-uns des radicaux $V_1, V_2, \ldots, V_\nu$ et des radicaux servant à exprimer les racines de l'unité des degrés $n_1, n_2, \ldots, n_\nu$ et des degrés inférieurs.

On peut donc supposer que les équations binômes de la chaîne

$$V^{n_\gamma} = F_\gamma(V_{\gamma+1}, V_{\gamma+2}, \ldots, V_\nu), \qquad (\gamma=1,2,3,\ldots,\nu)$$

sont irréductibles après l'adjonction de

$$\omega_{\gamma+1} \cdot \omega_{\gamma+2}, \ldots, \omega_\nu, \quad V_{\gamma+1}, V_{\gamma+2}, \ldots, V_\nu.$$

D'après le théorème démontré l'irréductibilité de cette équation sera encore conservée après l'adjonction de ω_γ.

La fonction F_γ a la forme

$$(3) \qquad F_\gamma = U_0 + U_1 V_{\gamma+1} + U_2 V_{\gamma+1}^2 + \ldots + U_{n_{\gamma+1}-1} V_{\gamma+1}^{n_{\gamma+1}-1},$$

les coefficients $U_0, U_1, U_2, \ldots, U_{n_{\gamma+1}-1}$ étant des fonctions entières de $V_{\gamma+2}, V_{\gamma+3}, \ldots, V_\nu$ avec des coefficients rationnels.

L'équation (3) peut être simplifiée en remplaçant $V_{\gamma+1}$ par une autre quantité.

Si U_h est différent de zéro, nous poserons

$$(4) \qquad U_h V_{\gamma+1}^h = W_{\gamma+1}.$$

En élevant les deux membres de cette équation à la puissance $n_{\gamma+1}$, on obtient que $W_{\gamma+1}$ est une racine d'une équation de la forme suivante

$$(5) \qquad W^{n_{\gamma+1}} = F'_{\gamma+1}(V_{\gamma+2}, V_{\gamma+3}, \ldots, V_\nu),$$

$F'_{\gamma+1}$ étant une fonction entière de $V_{\gamma+2}, V_{\gamma+3}, \ldots, V_\nu$ avec des coefficients rationnels.

Déterminons deux nombres entiers r et s de manière qu'on ait

$$hr - n_{\gamma+1}s = 1, \qquad r < n_{\gamma+1}.$$

On déduit de l'équation (4) que

$$U_h^r (V_{\gamma+1}^{n_{\gamma+1}})^s . V_{\gamma+1} = W_{\gamma+1}^r .$$

Il en résulte que

$$V_{\gamma+1} = U' . W_{\gamma+1}^r , \tag{6}$$

U' étant une fonction entière de $V_{\gamma+2}, V_{\gamma+3}, \ldots, V_\nu$ avec des coefficients rationnels.

En introduisant cette valeur de $V_{\gamma+1}$ dans l'expression (3) on obtient

$$F_\gamma = U_0 + W_{\gamma+1} + U_2' W_{\gamma+1}^2 + \ldots + U'_{n_{\gamma+1}-1} W_{\gamma+1}^{n_{\gamma+1}-1} .$$

L'équation (5) reste irréductible après l'adjonction de

$$\omega_{\gamma+2}, \omega_{\gamma+3}, \ldots, \omega_\nu , \quad V_{\gamma+2}, V_{\gamma+3}, \ldots, V_\nu .$$

Dans le cas contraire $W_{\gamma+1}$ serait rationnel en

$$\omega_{\gamma+1}, \omega_{\gamma+2}, \ldots, \omega_\nu , \quad V_{\gamma+2}, V_{\gamma+3}, \ldots, V_\nu ;$$

d'après l'équation (6) $V_{\gamma+1}$ serait aussi exprimable par ces mêmes quantités, ce qui est impossible.

Supposons maintenant que dans la série

$$F_\gamma , F_{\gamma+1} , F_{\gamma+2} , \ldots , F_1 , F$$

la première fonction qui contienne $V_{\gamma+1}$ soit

$$F_a(V_{a+1}, V_{a+2}, \ldots, V_\nu).$$

Cette fonction a la forme

$$\sum C_{a\beta\ldots\gamma} V_\gamma^\alpha V_{\gamma-1}^\beta \ldots V_{a+1}^\lambda . \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 0, 1, \ldots, n_\gamma - 1 \\ \beta = 0, 1, \ldots, n_{\gamma-1} - 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda = 0, 1, \ldots, n_{a+1} - 1 \end{pmatrix}$$

Les coefficients C sont des fonctions entières de $V_{\gamma+1}, V_{\gamma+2}, \ldots, V_\nu$ avec des coefficients rationnels. Au moyen de la transformation indiquée plus haut pour F_γ un de ces coefficients peut être mis sous la forme

$$U_0 + V_{\gamma+1} + U_2 V_{\gamma+1}^2 + \ldots + U_{n_{\gamma+1}-1} V_{\gamma+1}^{n_{\gamma+1}-1} .$$

Nous dirons qu'une expression algébrique a *la forme normale,* si l'on a exécuté toutes les transformations indiquées.

Les expressions algébriques de la forme normale ont des propriétés remarquables que nous allons étudier.

§ 3. Supposons qu'on ait identiquement

$$(1) \qquad \Phi(x\,,\,V_\gamma\,,\,V_{\gamma+1}\,,\,\ldots\,,\,V_\nu) = \Phi(x\,,\,\omega_\gamma V_\gamma\,,\,V_{\gamma+1}\,,\,\ldots\,,\,V_\nu),$$

Φ étant une fonction entière des arguments indiqués avec des coefficients rationnels.

En égalant les coefficients des mêmes puissances de x on trouve au moins une relation de la forme

$$\varphi(V_\gamma\,,\,V_{\gamma+1}\,,\,\ldots\,,\,V_\nu) = \varphi(\omega_\gamma V_\gamma\,,\,V_{\gamma+1}\,,\,\ldots\,,\,V_\nu),$$

φ étant une fonction entière différente de zéro.

L'équation

$$(2) \qquad \varphi(V\,,\,V_{\gamma+1}\,,\,\ldots\,,\,V_\nu) = \varphi(\omega_\gamma V\,,\,V_{\gamma+1}\,,\,\ldots\,,\,V_\nu),$$

dont le degré peut être supposé inférieur à n_γ, est vérifiée pour $V = V_\gamma$. Mais V_γ est racine d'une équation irréductible du degré n_γ. Donc l'équation (2) est une identité. Par conséquent les coefficients des termes semblables dans les deux membres de cette relation sont égaux. En égalant deux coefficients différents de zéro on trouve

$$\psi(V_{\gamma+1}\,,\,V_{\gamma+2}\,,\,\ldots\,,\,V_\nu) = \omega_\gamma^p\,.\,\psi(V_{\gamma+1}\,,\,V_{\gamma+2}\,,\,\ldots\,,\,V_\nu).$$

Il en résulte

$$\omega_\gamma^p = 1.$$

C'est impossible, p étant inférieur à n_γ.

On peut donc affirmer que

les fonctions

$$\Phi(x\,,\,V_\gamma\,,\,V_{\gamma+1}\,,\,\ldots\,,\,V_\nu)\;,\;\; \Phi(x\,,\,\omega_\gamma V_\gamma\,,\,V_{\gamma+1}\,,\,\ldots\,,\,V_\nu),$$

$$\Phi(x\,,\,\omega_\gamma^2 V_\gamma\,,\,V_{\gamma+1}\,,\,\ldots\,,\,V_\nu)\,,\,\ldots\,,\,\Phi(x\,,\,\omega_\gamma^{n_\gamma-1} V_\gamma\,,\,V_{\gamma+1}\,,\,\ldots\,,\,V_\nu)$$

sont différentes entre elles.

En appliquant le théorème IV (§ 1) on conclut que le produit

$$\prod_{k_1=1}^{k_1=n_1-1} [x - F(\omega_1^{k_1} V_1\,,\,V_2\,,\,\ldots\,,\,V_\nu)] = \Phi(x\,,\,V_a\,,\,V_{a+1}\,,\,\ldots\,,\,V_\nu)$$

est irréductible après l'adjonction de

$$\omega_a, \omega_{a+1}, \ldots, \omega_\nu, V_a, V_{a+1}, \ldots, V_\nu.$$

Ce produit ne contient pas de radical V_1, et en même temps peuvent disparaître les radicaux

$$V_2, V_3, \ldots, V_{a-1}.$$

Pour la même raison sont irréductibles les fonctions suivantes

$$\prod_{k_a=1}^{k_a=n_a-1} \Phi(x, \omega_a^{k_a} V_a, V_{a+1}, \ldots, V_\nu) = \Phi_1(x, V_b, V_{b+1}, \ldots, V_\nu), \quad b > a;$$

$$\prod_{k_b} \Phi_1(x, \omega_b^{k_b} V_b, V_{b+1}, \ldots, V_\nu) = \Phi_2(x, V_c, V_{c+1}, \ldots, V_\nu), \quad c > b;$$

. . . .

$$\prod_{k_m} \Phi_p(x, \omega_m^{k_m} V_m, V_{m+1}, \ldots, V_\nu) = \Psi(x).$$

La fonction $\Psi(x)$ est une fonction entière en x avec des coefficients rationnels. Le coefficient de la plus haute puissance de x est égal à un. Cette fonction n'a pas d'autres racines que les différentes valeurs de l'expression algébrique

$$F(V_1, V_2, \ldots, V_\nu).$$

De la même manière on pourra former l'équation irréductible avec des coefficients rationnels qui est satisfaite par l'expression

$$\varphi(V_a, V_{a+1}, \ldots, V_\nu),$$

φ étant une fonction entière de $V_a, V_{a+1}, \ldots, V_\nu$ avec des coefficients rationnels.

Supposons qu'une fonction entière de ν variables indépendantes avec des coefficients rationnels

(3) $$\Phi(v_1, v_2, \ldots, v_\nu)$$

s'annule pour

$$v_1 = V_1, \quad v_2 = V_2, \quad \ldots, \quad v_\nu = V_\nu.$$

Réduisons les puissances de $v_1, v_2, \ldots, v_\nu$ au moyen des équations

$$(4)\qquad \begin{cases} v_1^{n_1} = F_1(v_2, v_3, \ldots, v_\nu), \\ v_2^{n_2} = F_2(v_3, v_4, \ldots, v_\nu), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_{\nu-1}^{n_{\nu-1}} = F_{\nu-1}(v_\nu), \\ v_\nu^{n_\nu} = A. \end{cases}$$

La fonction Φ aura la forme

$$(5)\qquad \Phi = a_0 + a_1 v_1 + a_2 v_1^2 + \ldots + a_{n_1-1} v_1^{n_1-1},$$

les coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n_1-1}$ étant des fonctions entières de $v_2, v_3, \ldots, v_\nu$ avec des coefficients rationnels.

En posant

$$v_1 = V_1, \qquad v_2 = V_2, \quad \ldots, \quad v_\nu = V_\nu$$

on trouve

$$a_0' + a_1' V_1 + a_2' V_1^2 + \ldots + a_{n_1-1}' V_1^{n_1-1} = 0.$$

Mais V_1 est la racine d'une équation irréductible du degré n_1. Donc

$$a_0' = 0, \qquad a_1' = 0, \qquad a_2' = 0, \quad \ldots, \quad a_{n_1-1}' = 0.$$

Par conséquent la fonction (5) devient nulle, quand on pose

$$v_2 = V_2, \qquad v_3 = V_3, \quad \ldots, \quad v_\nu = V_\nu,$$

en laissant v_1 tout à fait arbitraire.

Après avoir mis les fonctions $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n_1-1}$ sous la forme

$$b_0 + b_1 v_2 + b_2 v_2^2 + \ldots + b_{n_2-1} v_2^{n_2-1}$$

au moyen de l'équation

$$v_2^{n_2} = F_2(v_3, v_4, \ldots, v_\nu),$$

on démontrera de la même manière que toutes ces fonctions s'annulent pour une valeur arbitraire de v_2 et pour

$$v_3 = V_3, \qquad v_4 = V_4, \quad \ldots, \quad v_\nu = V_\nu.$$

Il résulte de ce raisonnement que la fonction (3)

$$\Phi(v_1, v_2, \ldots, v_\nu),$$

étant réduite au moyen du système (4), devient nulle pour des valeurs arbitraires de $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_\nu$.

Donc *en changeant les valeurs des radicaux dans la relation*

$$\Phi(V_1, V_2, \ldots, V_\nu) = 0$$

on obtient une autre relation

$$\Phi(V_1', V_2', \ldots, V_\nu') = 0.$$

Voici une conséquence de ce théorème.

La fonction $\Psi(x)$ que nous avons formée s'annule pour

$$x = F(V_1, V_2, \ldots, V_\nu).$$

Cette fonction devient aussi nulle pour toute autre valeur de l'expression algébrique $F(V_1, V_2, \ldots, V_\nu)$.

On peut donc affirmer que

toutes les valeurs de l'expression algébrique de forme normale sont racines de la seule équation $\Psi(x) = 0$.

Une autre conséquence du théorème démontré est la suivante:

Les équations binômes

$$V^{n_\gamma} = F_\gamma(V_{\gamma+1}, V_{\gamma+2}, \ldots, V_\nu)$$

restent irréductibles quand on change les valeurs des radicaux $V_{\gamma+1}, V_{\gamma+2}, \ldots, V_\nu$.

Supposons que l'équation

(6) $$V^{n_{\nu-1}} = F_{\nu-1}(V_\nu')$$

soit réductible. On aura la décomposition en facteurs

$$V^{n_{\nu-1}} - F_{\nu-1}(V_\nu') = \Phi(V, V_\nu') \cdot \Psi(V, V_\nu').$$

En remplaçant V_ν', racine de l'équation irréductible

(7) $$V^{n_\nu} = A,$$

par V_ν on obtient la relation impossible

$$V^{n_{\nu-1}} - F_{\nu-1}(V_\nu) = \Phi(V, V_\nu) \cdot \Psi(V, V_\nu).$$

Il résulte de l'irréductibilité des équations (6) et (7) que si l'équation

$$\varphi(v_{\nu-1}, v_\nu) = 0, \tag{8}$$

φ étant une fonction entière de $v_{\nu-1}$ et v_ν avec des coefficients rationnels, est satisfaite pour

$$v_{\nu-1} = V'_{\nu-1}, \qquad v_\nu = V'_\nu.$$

la fonction $\varphi(v_{\nu-1}, v_\nu)$ devient identiquement nulle quand on réduit les puissances de $v_{\nu-1}$ et v_ν au moyen des équations

$$v_{\nu-1}^{n_{\nu-1}} = F_{\nu-1}(v_\nu), \qquad v_\nu^{n_\nu} = A.$$

L'équation (8) sera donc aussi vérifiée pour

$$v_{\nu-1} = V_{\nu-1}, \qquad v_\nu = V_\nu.$$

Supposons maintenant qu'on ait

$$V^{n_{\nu-2}} - F_{\nu-2}(V'_{\nu-1}, V'_\nu) = \Phi(V, V'_{\nu-1}, V'_\nu) \cdot \Psi(V, V'_{\nu-1}, V'_\nu).$$

En remplaçant ici $V'_{\nu-1}$ et V'_ν par $V_{\nu-1}$ et V_ν on obtient une décomposition en facteurs de la fonction irréductible

$$V^{n_{\nu-1}} - F_{\nu-2}(V_{\nu-1}, V_\nu),$$

ce qui est impossible.

L'irréductibilité de l'équation

$$V^{n_{\nu-2}} - F_{\nu-2}(V'_{\nu-1}, V'_\nu) = 0$$

est donc démontrée.

La même démonstration est applicable aux autres équations binômes.

De l'irréductibilité de l'équation

$$V^{n_\gamma} = F_\gamma(V'_{\gamma+1}, V'_{\gamma+2}, \ldots, V'_\nu)$$

résulte que *les fonctions entières à coefficients rationnels*

$$\Phi(x\,,\, V'_\gamma\,,\, V'_{\gamma+1}\,,\,\ldots\,,\, V'_\nu)\;,\quad \Phi(x\,,\,\omega_\gamma V'_\gamma\,,\, V'_{\gamma+1}\,,\,\ldots\,,\, V'_\nu),$$

$$\Phi(x\,,\,\omega_\gamma^2 V'_\gamma\,,\, V'_{\gamma+1}\,,\,\ldots\,,\, V'_\nu)\,,\;\ldots\,,\;\Phi(x\,,\,\omega_\gamma^{n_\gamma-1} V'_\gamma\,.\, V'_{\gamma+1}\,,\,\ldots\,,\, V'_\nu)$$

sont différentes entre elles.

§ 4. Soit

$$f(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} x + p_n = 0$$

l'équation irréductible proposée, dont les coefficients sont des nombres rationnels.

Désignons les racines de cette équation par

$$x_1\,,\, x_2\,,\, x_3\,,\,\ldots\,,\, x_n\,.$$

Supposons qu'on ait

$$x_1 = F(V_1\,,\, V_2\,,\,\ldots\,,\, V_\nu),$$

F étant une expression algébrique de forme normale.

Par le procédé indiqué dans le paragraphe précédent on forme la fonction irréductible $\Psi(x)$ qui s'annule pour $x = x_1$.

Les équations irréductibles

$$\Psi(x) = x^{n_1 n_a n_b \ldots n_m} + q_1 x^{n_1 n_a \ldots n_m - 1} + \ldots = 0,$$

$$f(x) = x^n \qquad + p_1 x^{n-1} \qquad + \ldots = 0$$

ayant une racine commune sont identiques. Donc

$$f(x) = \Psi(x),$$

$$n_1 n_a n_b \ldots n_m = n.$$

Les nombres $n_1\,,\, n_a\,,\, n_b\,,\,\ldots\,,\, n_m$ sont les exposants des radicaux $V_1\,,\, V_a\,,\, V_b\,,\,\ldots\,,\, V_m$.

En résumant les résultats obtenus, on peut énoncer les théorèmes suivants d'Abel:

1) *Dans l'expression algébrique d'une racine d'une équation irréductible du degré n sont nécessairement contenus les radicaux, dont les exposants sont les diviseurs premiers de n.*

2) *L'expression algébrique satisfaisant à l'équation irréductible du degré n a n valeurs différentes, qui sont les racines de l'équation proposée.*

3) *Si une racine de l'équation irréductible est exprimable par radicaux, toutes les autres racines sont aussi exprimables par radicaux.*

Nous allons encore démontrer le théorème suivant:

4) *Les radicaux contenus dans l'expression des racines de l'équation proposée sont des fonctions entières des racines de cette équation et des racines de l'unité.*

Soit

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} x_1 = U_0 + V_1 + U_2 V_1^2 + \dots + U_{n_1-1} V_1^{n_1-1}, \\ x_2 = U_0 + \omega_1^{-1} V_1 + \omega_1^{-2} U_2 V_1^2 + \dots + \omega_1^{-(n_1-1)} U_{n_1-1} V_1^{n_1-1}, \\ x_3 = U_0 + \omega_1^{-2} V_1 + \omega_1^{-4} U_2 V_1^2 + \dots + \omega_1^{-2(n_1-1)} U_{n_1-1} V_1^{n_1-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n_1} = U_0 + \omega_1^{-(n_1-1)} V_1 + \omega_1^{-2(n_1-1)} U_2 V_1^2 + \dots + \omega_1^{-(n_1-1)^2} U_{n_1-1} V_1^{n_1-1}. \end{array}\right.$$

En ajoutant ces équations après les avoir multipliées respectivement par

$$1\,,\ \omega_1\,,\ \omega_1^2\,,\ \dots\,,\ \omega_1^{n_1-1}$$

on trouve

$$(2)\qquad n_1 V_1 = x_1 + \omega_1 x_2 + \omega_1^2 x_3 + \dots + \omega_1^{n_1-1} x_{n_1}.$$

En prenant les autres valeurs des radicaux on aura

$$(3)\qquad n_1 V_1' = x_{h_1} + \omega_1 x_{h_2} + \omega_1^2 x_{h_3} + \dots + \omega_1^{n_1-1} x_{h_{n_1}},$$

les nombres $h_1, h_2, \dots, h_{n_1}$ étant différents entre eux.

Du système (1) résultent encore les formules

$$\begin{array}{l} n_1 U_0 = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{n_1}, \\ n_1 U_2 V_1^2 = x_1 + \omega_1^2 x_2 + \omega_1^4 x_3 + \dots + \omega_1^{2(n_1-1)} x_{n_1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ n_1 U_{n_1-1} V_1^{n_1-1} = x_1 + \omega_1^{n_1-1} x_2 + \omega_1^{2(n_1-1)} x_3 + \dots + \omega_1^{(n_1-1)^2} x_{n_1}. \end{array}$$

L'expression algébrique

$$z = V_1$$

satisfait à une équation $\psi(z) = 0$ dont les coefficients sont des nombres rationnels (§ 3). Les fonctions rationnelles

$$\frac{1}{V_1^2}, \frac{1}{V_1^3}, \ldots, \frac{1}{V_1^{n_1-1}}$$

de la racine de cette équation peuvent être transformées en fonctions entières de V_1. Par conséquent

(4) $$V_1, U_0, U_2, \ldots, U_{n_1-1}$$

sont des fonctions entières de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et ω_1.

Toutes les valeurs des expressions algébriques (4) jouissent de la même propriété.

Passons au radical V_2.

Si le second membre de l'équation

(5) $$V^{n_1} = F_1(V_2, V_3, \ldots, V_\nu)$$

contient V_2, on peut poser

$$V_1^{n_1} = u_0 + V_2 + u_2 V_2^2 + \ldots + u_{n_2-1} V_2^{n_2-1},$$

$u_0, u_2, \ldots, u_{n_2-1}$ étant des fonctions entières de $V_3, V_4, \ldots, V_\nu$ avec des coefficients rationnels.

Supposons que la valeur

$$V_1^{n_1} = y_1$$

se change en

$$y_2, y_3, \ldots, y_{n_2},$$

quand on remplace V_2 par

$$\omega_2^{-1} V_2, \omega_2^{-2} V_2, \ldots, \omega_2^{-(n_2-1)} V_2.$$

On trouve

$$n_2 V_2 = y_1 + \omega_2 y_2 + \omega_2^2 y_3 + \ldots + \omega_2^{n_2-1} y_{n_2},$$
$$n_2 u_0 = y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n_2},$$
$$n_2 u_2 V_2^2 = y_1 + \omega_2^2 y_2 + \omega_2^4 y_3 + \ldots + \omega_2^{2(n_2-1)} y_{n_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$n_2 u_{n_2-1} V_2^{n_2-1} = y_1 + \omega_2^{n_2-1} y_2 + \omega_2^{2(n_2-1)} y_3 + \ldots + \omega_2^{(n_2-1)^2} y_{n_2}.$$

Il en résulte que les quantités

$$V_2, u_0, u_2, \ldots, u_{n_2-1}$$

sont des fonctions entières de

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \omega_1, \omega_2.$$

Supposons maintenant que l'équation (5) ne contienne pas V_2.

Une des quantités $U_0, U_2, U_3, \ldots, U_{n_1-1}$ qui entrent dans les relations (1) contient nécessairement V_2. Supposons que ce soit U_h. On peut poser

$$U_h = A_0 + V_2 + A_2 V_2^2 + \ldots + A_{n_2-1} V_2^{n_2-1},$$

$A_0, A_2, \ldots, A_{n_2-1}$ étant des fonctions entières de $V_3, V_4, \ldots, V_\nu$ avec des coefficients rationnels.

Designons par

$$z_2, z_3, \ldots, z_{n_2}$$

les valeurs que prend

$$z_1 = U_h,$$

quand on y remplace V_2 par

$$\omega_2^{-1} V_2, \omega_2^{-2} V_2, \ldots, \omega_2^{-(n_2-1)} V_2.$$

On trouve que

$$n_2 V_2 = z_1 + \omega_2 z_2 + \omega_2^2 z_3 + \ldots + \omega_2^{n_2-1} z_{n_2}$$

et par conséquent V_2 est une fonction entière de

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \omega_1, \omega_2$$

avec des coefficients rationnels.

On fera voir de la même manière que les radicaux $V_3, V_4, \ldots, V_\nu$ sont des fonctions entières de

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu.$$

Le théorème 4) est donc démontré.

Les propriétés des expressions algébriques que nous avons étudiées ont une grande importance. Elles donnent la méthode générale pour

résoudre les équations littérales du deuxième, troisième et quatrième degré. Elles servent pour base à la démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations littérales des degrés supérieurs.

Galois a obtenu les conditions de la résolubilité algébrique des équations numériques en supposant que toutes les racines d'une équation soient exprimables par des radicaux. D'après le théorème 3) il aurait suffi de supposer qu'une seule racine de l'équation soit exprimable algébriquement.

DEUX DÉMONSTRATIONS
DE LA CONVERGENCE DE CERTAINES FRACTIONS CONTINUES

PAR

ANDRÉ MARKOFF
à St. PÉTERSBOURG.

En considérant le développement connu de l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(y)}{z-y}\,dy$$

en fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z+\beta_1-\cfrac{1}{\alpha_2 z+\beta_2-\cfrac{1}{\alpha_3 z+\beta_3-\ddots}}}$$

supposons les limites a et b réelles de même que toutes les valeurs de la variable d'intégration y et de $\sqrt{f(y)}$.

Nous allons démontrer très simplement, que dans ces suppositions on aura

$$\int_a^b \frac{f(y)}{z-y}\,dy = \lim_{n=\infty}\cfrac{1}{\alpha_1 z+\beta_1-\cfrac{1}{\alpha_2 z+\beta_2-\ddots-\cfrac{1}{\alpha_n z+\beta_n}}}$$

pour toutes les valeurs de z, qui ne sont pas sur le chemin d'intégration.

Acta mathematica. 19. Imprimé le 2 février 1895.

Rappelons[1] à ce but, que l'expression

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \cdots - \cfrac{1}{\alpha_n z + \beta}}}$$

se réduit à la fraction

$$\frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)},$$

dont le dénominateur $\varphi_n(z)$ est une fonction entière de z, de degré n, satisfaisant aux conditions

$$0 = \int_a^b \varphi_n(y) f(y) dy = \int_a^b y \varphi_n(y) f(y) dy = \ldots = \int_a^b y^{n-1} \varphi_n(y) f(y) dy,$$

et le numérateur $\psi_n(z)$ se détermine par la formule

$$\psi_n(z) = \int_a^b \frac{\varphi_n(z) - \varphi_n(y)}{z - y} f(y) dy.$$

On sait aussi, que l'équation

$$\varphi_n(z) = 0$$

n'a point de racines multiples ou imaginaires et que toutes ses racines

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

sont comprises entre a et b.

Il en résulte, que pour chaque fonction entière $\Omega(y)$, de degré moindre que $2n$, on aura

$$\int_a^b \Omega(y) f(y) dy = \sum \frac{\psi_n(y_i)}{\varphi_n'(y_i)} \Omega(y_i);$$

en particulier

$$\int_a^b f(y) dy = \sum \frac{\psi_n(y_i)}{\varphi_n'(y_i)}$$

---

[1] C. Possé, *Sur quelques applications des fractions continues algébriques*, 1886.

et

$$\frac{\psi_n(y_i)}{\varphi_n'(y_i)} = \int_a^b \left\{ \frac{\varphi_n(y)}{(y - y_i)\varphi_n'(y_i)} \right\}^2 f(y)dy > 0.$$

D'autre côté l'égalité évidente

$$\frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)} = \sum \frac{\psi_n(y_i)}{\varphi_n'(y_i)} \frac{1}{z - y_i}$$

nous donne

$$\int_a^b \frac{f(y)}{z - y} dy - \frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)} = \int_a^b \frac{f(y)}{z - y} dy - \sum \frac{\psi_n(y_i)}{\varphi_n'(y_i)} \frac{1}{z - y_i}$$

et par conséquent

$$\int_a^b \frac{f(y)}{z - y} dy - \frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)} = \int_a^b \left\{ \frac{1}{z - y} - \Omega(y) \right\} f(y)dy$$

$$- \sum \left\{ \frac{1}{z - y_i} - \Omega(y_i) \right\} \frac{\psi_n(y_i)}{\varphi_n'(y_i)},$$

quelle que soit la fonction entière $\Omega(y)$ de degré moindre que $2n$.

Après ces remarques prenons un nombre x quelconque, satisfaisant seulement à l'inégalité

$$\text{mod.} \frac{y - x}{z - x} < 1$$

pour tout le chemin d'intégration, et posons

$$\Omega(y) = \frac{1}{z - x} + \frac{y - x}{(z - x)^2} + \frac{(y - x)^2}{(z - x)^3} + \ldots + \frac{(y - x)^{2n-1}}{(z - x)^{2n}}.$$

Alors la différence

$$\frac{1}{z - y} - \Omega(y)$$

sera réduite à

$$\frac{(y - x)^{2n}}{(z - y)(z - x)^{2n}}.$$

et par suite on aura

$$\int_a^b \frac{f(y)}{z-y}\,dy - \frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)} = \int_a^b \frac{(y-x)^{2n}}{(z-y)(z-x)^{2n}} f(y)\,dy - \sum \frac{(y_i-x)^{2n}}{(z-y_i)(z-x)^{2n}} \frac{\psi_n(y_i)}{\varphi_n'(y_i)}.$$

Quant aux expressions

$$\int_a^b \frac{(y-x)^{2n}}{(z-y)(z-x)^{2n}} f(y)\,dy \quad \text{et} \quad \sum \frac{(y_i-x)^{2n}}{(z-y_i)(z-x)^{2n}} \frac{\psi_n(y_i)}{\varphi_n'(y_i)},$$

leurs modules sont plus petits que le produit de l'intégrale

$$\int_a^b f(y)\,dy$$

par le maximum du module de l'expression

$$\frac{(y-x)^{2n}}{(z-y)(z-x)^{2n}}$$

sur le chemin de l'intégration.

Or, x étant constant, ce maximum sera si petit qu'on voudra, pour les valeurs de n assez grandes.

Donc la différence

$$\int_a^b \frac{f(y)}{z-y}\,dy - \frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)}$$

tend vers zéro, à mesure que n croît infiniment. Les considérations précédentes peuvent aussi indiquer une limite supérieure au module de la différence

$$\int_a^b \frac{f(y)}{z-y}\,dy - \cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \cfrac{\ddots}{\ddots - \cfrac{1}{\alpha_n z + \beta_n}}}}.$$

A cet effet il est important de choisir le nombre x en sorte, que le maximum du module de

$$\frac{y-x}{z-x}$$

soit le plus petit possible.

Conformément à cette condition nous posons

$$x=\frac{a+b}{2},$$

si z est réel, et

$$x=\frac{a+b}{2}-dt\sqrt{-1},$$

si z est un nombre imaginaire:

$$z=c+d\sqrt{-1},$$

en déterminant t comme la racine positive de l'équation

$$t^2+\frac{d^2+(c-a)(c-b)}{d^2}t-\left(\frac{b-a}{2d}\right)^2=0.$$

Avec la valeur de x choisie par nous, on trouvera que le module de la différence

$$\int_a^b\frac{f(y)}{z-y}dy-\cfrac{1}{\alpha_1 z+\beta_1-\cfrac{1}{\alpha_2 z+\beta_2-\cdots-\cfrac{1}{\alpha_n z+\beta_n}}}$$

est inférieur à

$$\frac{2}{\sqrt{(c-a)^2+d^2}}\left(\frac{t}{t+1}\right)^n\int_a^b f(y)dy \quad \text{ou à} \quad \frac{2}{\sqrt{(c-b)^2+d^2}}\left(\frac{t}{t+1}\right)^n\int_a^b f(y)dy$$

$$\text{ou à} \quad \frac{2}{\sqrt{d^2}}\left(\frac{t}{t+1}\right)^n\int_a^b f(y)dy$$

pour

$$z=c+d\sqrt{-1}$$

et est inférieur à

$$\frac{1}{a-z}\left(\frac{b-a}{2z-a-b}\right)^{2n}\int_a^b f(y)dy \quad \text{ou} \quad \frac{1}{z-b}\left(\frac{b-a}{2z-a-b}\right)^{2n}\int_a^b f(y)dy$$

pour les valeurs de z réelles satisfaisant à la condition

$$(z-a)(z-b)>0.$$

A propos de ces résultats, remarquons que pour les valeurs de z réelles un autre calcul nous donne comme une limite supérieure du même module le produit de

$$\frac{4(b-a)^{2n}\int_a^b f(y)\,dy}{\left\{2z-a-b+2\sqrt{(z-a)(z-b)}\right\}^{2n}+\left\{2z-a-b-2\sqrt{(z-a)(z-b)}\right\}^{2n}}$$

par $\frac{1}{a-z}$ ou par $\frac{1}{z-b}$.

La démonstration précédente suppose les limites a et b finies.

Nous allons donner maintenant, pour les valeurs de z réelles, une autre démonstration, laquelle s'étend aux plusieurs cas

$$\text{de } a=-\infty \text{ ou de } b=+\infty.$$

Soit pour fixer les idées

$$a<y_1<y_2<\ldots<y_{n-1}<y_n<b<z.$$

En posant

$$\Omega_0(y)=\frac{\varphi_n^2(z)-\varphi_n^2(y)}{(z-y)\varphi_n^2(z)}$$

et

$$\Omega_1(y)=\frac{(y-y_n)\varphi_n^2(z)-(z-y_n)\varphi_n^2(y)}{(z-y)(y-y_n)\varphi_n^2(z)},$$

on aura

$$\int_a^b \Omega_0(y)f(y)dy=\int_a^b \Omega_1(y)f(y)dy=\frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)},$$

$$\Omega_0(y)\leqq\frac{1}{z-y} \quad \text{pour } a\leqq y\leqq b,$$

$$\Omega_1(y)\geqq\frac{1}{z-y} \quad \text{pour } a\leqq y\leqq y_n,$$

$$\Omega_1(y)\geqq\frac{1}{z-y}-\frac{(z-y_n)\varphi_n^2(b)}{(z-y)(b-y_n)\varphi_n^2(z)} \quad \text{pour } y_n<y\leqq b$$

et par suite

$$\int_a^b \frac{f(y)}{z-y}\,dy > \frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)} > \int_a^b \frac{f(y)}{z-y}\,dy - \frac{(z-y_n)\varphi_n^2(b)}{(b-y_n)\varphi_n^2(z)} \int_{y_n}^b \frac{f(y)}{z-y}\,dy.$$

La première de ces inégalités suffit pour conclure la convergence de notre fraction continue, eu égard à l'inégalité

$$\frac{\psi_{n+1}(z)}{\varphi_{n+1}(z)} > \frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)}.$$

Quant à la formule

$$\int_a^b \frac{f(y)}{z-y}\,dy = \cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \cfrac{1}{\alpha_3 z + \beta_3 - \cdots}}}$$

elle découle immédiatement de nos inégalités dans tous les cas, où l'on peut démontrer, qu'une (ou toutes les deux) des quantités

$$\frac{(z-y_n)\varphi_n^2(b)}{(b-y_n)\varphi_n^2(z)} \quad \text{et} \quad \int_{y_n}^b \frac{f(y)}{z-y}\,dy$$

est infiniment petite pour $n=\infty$.

Il n'y a pas de difficulté, si a est fini, car

$$\frac{(z-y_n)\varphi_n^2(b)}{(b-y_n)\varphi_n^2(z)} < \left(\frac{b-a}{z-a}\right)^{2n-1}.$$

En passant au cas de

$$a = -\infty,$$

nous posons

$$b = 0, \qquad f(y) = e^y(-y)^\lambda g(y),$$

λ étant constant, et ajoutons les conditions $\lambda + 1 > 0$ et $g'(y) > 0$ pour $-\infty < y < 0$. Alors, en appliquant à la fonction

$$V(y,\xi) = e^y(-y)^\lambda \{g(y)\}^\xi$$

le théorème premier de ma seconde note[1] *Sur les racines de certaines équations,* on trouvera, que les racines

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

de l'équation

$$\varphi_n(y) = 0$$

sont plus grandes ($\xi = 1$) que les racines correspondantes ($\xi = 0$)

$$y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$$

de l'équation

$$e^{-y} y^{-\lambda} \frac{d^n}{dy^n}\{e^y y^{\lambda+n}\} = 0.$$

Par conséquent dans le cas considéré les valeurs de $\int\limits_{y_n}^{b} \frac{f(y)}{z-y} dy$ et de $\frac{(z-y_n)\varphi_n^2(b)}{(b-y_n)\varphi_n^2(z)}$ sont respectivement inférieures à $\int\limits_{y_n^0}^{b} \frac{f(y)}{z-y} dy$ et à $\left(\frac{-y_1^0}{z-y_1^0}\right)^2 \ldots \left(\frac{-y_{n-1}^0}{z-y_{n-1}^0}\right)^2 \left(\frac{-y_n^0}{z-y_n^0}\right)$. Or l'expression

$$\left(\frac{-y_1^0}{z-y_1^0}\right)^2 \ldots \left(\frac{-y_{n-1}^0}{z-y_{n-1}^0}\right)^2 \left(\frac{-y_n^0}{z-y_n^0}\right),$$

égale à

$$\left(1 - \frac{z}{y_n^0}\right) \left| 1 + \frac{n}{\lambda+1} z + \frac{n(n-1)}{(\lambda+1)(\lambda+2)} \frac{z^2}{1.2} + \ldots \right|^{-2},$$

est plus petite que la suivante

$$\left| 1 + \frac{n}{\lambda+1} z + \frac{n(n-1)}{(\lambda+1)(\lambda+2)} \frac{z^2}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)} \frac{z^3}{1.2.3} + \ldots \right|^{-1},$$

laquelle devient infiniment petite pour $n = \infty$. Donc l'intégrale

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{e^y(-y)^\lambda g(y)}{z-y} dy$$

[1] Mathematische Annalen, Bd. 27.

se développe en fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \cfrac{1}{\alpha_3 z + \beta_3 - \ddots}}}$$

convergente pour toutes les valeurs de z réelles et positives, si $g(y) > 0$ et si les intégrales

$$\int_{-\infty}^{0} e^y(-y)^\lambda g(y)dy\,,\ \int_{-\infty}^{0} e^y(-y)^{\lambda+1} g(y)dy\,,\ \ldots$$

ont un sens.

Et nous pouvons assurer, que cette fraction continue est égale à l'intégrale considérée au moins dans les cas où l'on a

$$\lambda + 1 > 0 \quad \text{et} \quad g'(y) > 0 \quad \text{pour} \quad -\infty < y \leqq 0;$$

dans ces cas la différence

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^y(-y)^\lambda g(y)}{z-y} dy - \cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \ddots - \cfrac{1}{\alpha_n z + \beta_n}}}$$

est moindre que

$$\frac{\left(1 - \frac{z}{y_n^0}\right) \int_{y_n^0}^{0} \frac{e^y(-y)^\lambda g(y)}{z-y} dy}{\left\{1 + \frac{n}{\lambda+1} z + \frac{n(n-1)}{(\lambda+1)(\lambda+2)} \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \ldots\right\}^2},$$

$-y_n^0$ étant la plus petite racine de l'équation

$$1 - \frac{n}{\lambda+1} z + \frac{n(n-1)}{(\lambda+1)(\lambda+2)} \frac{z^2}{1 \cdot 2} - \ldots = 0.$$

On peut aller plus loin en démontrant ce théorème important et simple:

Théorème. Si deux fonctions réelles

$$f^0(y) \quad \text{et} \quad f(y)$$

d'une variable réelle y satisfont aux inégalités

$$f^0(y) > f(y) > 0$$

pour toutes les valeurs de y, comprises entre a et b; en développant les intégrales

$$\int_a^b \frac{f^0(y)}{z-y}dy \quad \text{et} \quad \int_a^b \frac{f(y)}{z-y}dy$$

en les fractions continues

$$\cfrac{1}{\alpha_1^0 z + \beta_1^0 - \cfrac{1}{\alpha_2^0 z + \beta_2^0 - \cfrac{1}{\alpha_3^0 z + \beta_3^0 - \ddots}}} \quad \text{et} \quad \cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \cfrac{1}{\alpha_3 z + \beta_3 - \ddots}}}$$

on aura

$$\int_a^b \frac{f^0(y)}{z-y}dy - \cfrac{1}{\alpha_1^0 z+\beta_1^0 - \cfrac{1}{\alpha_2^0 z+\beta_2^0 - \ddots - \cfrac{1}{\alpha_n^0 z+\beta_n^0}}} > \int_a^b \frac{f(y)}{z-y}dy - \cfrac{1}{\alpha_1 z+\beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z+\beta_2 - \ddots - \cfrac{1}{\alpha_n z+\beta_n}}}$$

pour $z > b$ (dans le cas de $z < a$ on doit changer le signe $>$ en $<$).

Pour démontrer notre théorème posons

$$V(y, \xi) = f^0(y) + \xi[f(y) - f^0(y)]$$

et considérons la fraction

$$\frac{\psi_n(z, \xi)}{\varphi_n(z, \xi)},$$

dont le dénominateur $\varphi_n(z, \xi)$ est une fonction entière de z, de degré n, satisfaisant aux équations

$$0 = \int_a^b \varphi_n(y, \xi) V(y, \xi) dy = \int_a^b y \varphi_n(y, \xi) V(y, \xi) dy = \ldots$$
$$= \int_a^b y^{n-1} \varphi_n(y, \xi) V(y, \xi) dy,$$

et le numérateur $\psi_n(z, \xi)$ se détermine par la formule

$$\psi_n(z, \xi) = \int_a^b \frac{\varphi_n(z, \xi) - \varphi_n(y, \xi)}{z - y} V(y, \xi) dy.$$

Cela posé, l'inégalité qu'il faut démontrer, deviendra

$$\int_a^b \frac{V(y, 0)}{z - y} dy - \frac{\psi_n(z, 0)}{\varphi_n(z, 0)} > \int_a^b \frac{V(y, 1)}{z - y} dy - \frac{\psi_n(z, 1)}{\varphi_n(z, 1)}.$$

Or on aura

$$\int_a^b \frac{V(y, \xi)}{z - y} dy - \frac{\psi_n(z, \xi)}{\varphi_n(z, \xi)} = \int_a^b \frac{\varphi_n^2(y, \xi)}{\varphi_n^2(z, \xi)} \frac{V(y, \xi)}{z - y} dy$$

et

$$\frac{d}{d\xi} \int_a^b \frac{\varphi_n^2(y, \xi)}{\varphi_n^2(z, \xi)} \frac{V(y, \xi)}{z - y} dy$$

$$= 2 \int_a^b V(y, \xi) \frac{\varphi_n(y, \xi)}{\varphi_n^3(z, \xi)} \frac{\varphi_n(z, \xi) \frac{\partial \varphi_n(y, \xi)}{\partial \xi} - \varphi_n(y, \xi) \frac{\partial \varphi_n(z, \xi)}{\partial \xi}}{z - y} dy$$

$$+ \int_a^b \frac{\varphi_n^2(y, \xi)}{\varphi_n^2(z, \xi)} \frac{\frac{\partial V(y, \xi)}{\partial \xi}}{z - y} dy$$

$$= \int_a^b \frac{\varphi_n^2(y, \xi)}{\varphi_n^2(z, \xi)} \frac{f(y) - f^0(y)}{z - y} dy < 0,$$

d'où l'on tirera notre inégalité immédiatement.

En s'arrêtant au cas, où

$$a = -\infty, \qquad b = 0, \qquad f^0(y) = e^y(-y)^\lambda, \qquad f(y) = e^y(-y)^\lambda g(y),$$

$$\lambda + 1 > 0\,,\ z > 0 \quad \text{et} \quad 0 < g(y) < 1 \quad \text{pour} \quad -\infty < y \leqq 0,$$

on trouvera, que la différence entre l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^y(-y)^\lambda g(y)}{z-y}\,dy$$

et la réduite

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \cdots - \cfrac{1}{\alpha_n z + \beta_n}}}$$

de la fraction continue correspondante n'excède pas

$$\frac{1.2.3\ldots n\Gamma(\lambda+1)}{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+n)z}\left\{1 + \frac{n}{\lambda+1}z + \frac{n(n-1)}{(\lambda+1)(\lambda+2)}\frac{z^2}{1.2} + \ldots\right\}^{-2}.$$

ZUR THEORIE DER ORTHOGONALEN DETERMINANTEN

VON

E. NETTO
in GIESSEN.

Nachdem im sechsten Bande der Acta mathematica S. 319—320 Herr T. J. STIELTJES vermutungsweise den Satz ausgesprochen hatte: *Bedeuten* $a_{\varkappa\lambda}$ *und* $b_{\varkappa\lambda}$ $(\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, n)$ *orthogonale Systeme von der Determinante* $+1$, *und verschwindet die Determinante* $|a_{\varkappa\lambda} + b_{\varkappa\lambda}|$, *so verschwinden mit ihr gleichzeitig auch alle ihre Subdeterminanten* $(n-1)^{\text{ter}}$ *Ordnung,* habe ich die Richtigkeit desselben im neunten Bande S. 295—300 dargelegt. Ich komme hier auf denselben Satz zurück, weil der eben angeführte Beweis des Vorzuges entbehrt, das Theorem in der Form einer Identität wiederzugeben; weil ausserdem die Determinante $|a_{\varkappa\lambda} + b_{\varkappa\lambda}|$ noch in interessanter Weise gedeutet werden kann; und weil ich endlich eine Erweiterung des STIELTJES'schen Satzes mit Hülfe einer Determinanten-Formel geben werde, die mir noch nicht bekannt zu sein scheint.

Diese Formel knüpft an den LAPLACE'schen Determinanten-Zerlegungssatz an. Es sei $|c_{ik}| = C$ $(i, k = 1, 2, \ldots, \mu)$ eine Determinante des Grades $\mu = m_1 + m_2$; der Coefficient von $c_{\alpha\beta}$ in der Entwickelung von C werde mit $C_{\alpha\beta}$, der Coefficient von $c_{\alpha\beta} \cdot c_{\gamma\delta}$ mit $C_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ u. s. w. bezeichnet. Dann können wir das LAPLACE'sche Theorem so schreiben:

$$(1) \qquad \sum_{(i)} C_{1i_1,\ldots,m_1 i_{m_1}} \cdot C_{m_1+1, i_{m_1+1},\ldots,\mu i_\mu} = C.$$

Bedeutet nun, unter Beibehaltung der Bezeichnungen, C eine Determinante des Grades ν, wobei $\nu > \mu$ sein soll, dann ist

$$(2) \qquad \sum_{(i)} C_{1i_1,\ldots,m_1 i_{m_1}} \cdot C_{m_1+1,i_{m_1+1},\ldots,\mu i_\mu} = C \cdot C_{11,22,\ldots,\mu\mu},$$

falls die Summationen in der Formel (2) genau so weit wie in (1) ausgeführt werden, so dass also bis auf die Folge stets

$$i_1, i_2, \ldots, i_{m_1}, i_{m_1+1}, \ldots, i_\mu \quad \text{mit} \quad 1, 2, \ldots, \mu$$

identisch ist.

Der Beweis für diese Verallgemeinerung des Zerlegungssatzes ist einfach zu führen. Der Übersichtlichkeit halber gebe ich ihn nur für den Fall $m_1 = m_2 = 2$; $\mu = 4$; $\nu = 6$ wobei der Satz dann

$$(3) \qquad \begin{aligned} C_{11,22}C_{33,44} + C_{12,23}C_{31,44} + C_{13,21}C_{32,44} + C_{13,24}C_{31,42} + C_{11,24}C_{32,43} + C_{12,24}C_{33,41} \\ = C \cdot C_{11,22,33,44} \end{aligned}$$

lautet. Entwickelt man die Determinante 8ter Ordnung

$$\begin{vmatrix} c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} & 0 & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} & 0 & 0 \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} & 0 & 0 \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & 0 & 0 & c_{25} & c_{26} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & 0 & 0 & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & 0 & 0 & c_{65} & c_{66} \end{vmatrix}$$

nach dem LAPLACE'schen Satze in die Summe von Producten aus Determinanten der vier ersten und der vier letzten Zeilen, dann entsteht die linke Seite der obigen Formel (3). Eine leichte Umformung führt die aufgestellte Determinante in die Gestalt

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} & \cdot & \cdot \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} & \cdot & \cdot \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} & \cdot & \cdot \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_{55} & c_{56} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_{65} & c_{66} \end{vmatrix}$$

über, welche die rechte Seite der Formel (3) liefert. Genau in derselben Weise wie in diesem Special-Falle wird die Richtigkeit des *verallgemeinerten Laplace'schen Determinantensatzes* dargetan.

Wir kommen nun zu unserem eigentlichen Gegenstand, bei dem wir die abgeleitete Formel benutzen werden.

Es mögen $a_{\varkappa\lambda}$ und $b_{\varkappa\lambda}$ $(\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, n)$ zwei beliebige orthogonale Systeme, und $U_{\mu\nu}$, $u_{\nu\mu}$ $(\mu = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 1, 2, \ldots, k)$ zwei Systeme von unbestimmten Parametern sein. Dann wird bei Benutzung der Orthogonalitäts-Bedingungen

$$(4)\quad \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11}, \ldots, a_{1n} + b_{1n}, U_{11}, \ldots, U_{1k} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} + b_{n1}, \ldots, a_{nn} + b_{nn}, U_{n1}, \ldots, U_{nk} \\ u_{11} \quad , \ldots, \quad u_{1n} \quad , 0, \ldots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{k1} \quad , \ldots, \quad u_{kn} \quad , 0, \ldots 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11}, \ldots, b_{n1}, 0, 0, 0 \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{1n}, \ldots, b_{nn}, 0, 0, 0, \ldots \\ 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots \\ 0, \ldots, 0, 0, 1, 0, \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \Sigma a_{1\varkappa} b_{1\varkappa} + 1, \Sigma a_{1\varkappa} b_{2\varkappa}, \ldots, U_{11}, \ldots, U_{1k} \\ \Sigma a_{2\varkappa} b_{1\varkappa}, \Sigma a_{2\varkappa} b_{2\varkappa} + 1, \ldots, U_{21}, \ldots, U_{2k} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Sigma u_{1\varkappa} b_{1\varkappa}, \Sigma u_{1\varkappa} b_{2\varkappa}, \ldots, 0, \ldots, 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix};$$

und ebenso erhält man umgekehrt durch Multiplication die Determinantenbeziehung

$$(5)\quad \begin{vmatrix} \Sigma a_{1\varkappa} b_{1\varkappa} + 1, & \Sigma a_{1\varkappa} b_{2\varkappa} & , \dots, & U_{11}, & \dots, & U_{1k} \\ \Sigma a_{2\varkappa} b_{1\varkappa} & , \Sigma a_{2\varkappa} b_{2\varkappa} + 1 & , \dots, & U_{21}, & \dots, & U_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{11} & , \quad u_{12} & , \dots, & 0, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{k1} & , \quad u_{k2} & , \dots, & 0, & \dots, & 0 \end{vmatrix}$$

$$\cdot \begin{vmatrix} b_{11}, \dots, b_{1n}, 0, 0, 0, \dots \\ \dots \\ b_{n1}, \dots, b_{nn}, 0, 0, 0, \dots \\ 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots \\ 0, \dots, 0, 0, 1, 0, \dots \\ 0, \dots, 0, 0, 0, 1, \dots \\ \dots \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11}, \dots, a_{1n} + b_{1n}, \dots, U_{11}, \dots, U_{1k} \\ \dots \\ a_{n1} + b_{n1}, \dots, a_{nn} + b_{nn}, \dots, U_{n1}, \dots, U_{nk} \\ \Sigma u_{1k} b_{1k}, \dots, \Sigma u_{1k} b_{nk}, \dots, 0, \dots, 0 \\ \dots \\ \Sigma u_{nk} b_{1k}, \dots, \Sigma u_{nk} b_{nk}, \dots, 0, \dots, 0 \end{vmatrix}.$$

Da die Determinante der $b_{\varkappa\lambda}$ den Werth ± 1 besitzt, so folgt aus den beiden Gleichungen (4), (5), dass das System der k^{ten} Subdeterminanten von $|a_{\varkappa\lambda} + b_{\varkappa\lambda}|$ ganz, linear und homogen durch dasjenige der k^{ten} Subdeterminanten von $\left|\sum_\varkappa a_{\lambda\varkappa} b_{\mu\varkappa} + \varepsilon_{\lambda\mu}\right|$ darstellbar ist, und umgekehrt jenes durch dieses. Hier bedeutet $\varepsilon_{\lambda\mu}$ wie gewöhnlich 0 oder 1, je nachdem μ von λ verschieden oder gleich λ ist. Der Satz gilt natürlich auch für $k = 0$.

Mit den $a_{\lambda\mu}$ und $b_{\lambda\mu}$ bildet bekanntlich auch $\sum_\varkappa a_{\lambda\varkappa} b_{\mu\varkappa}$ gleichzeitig ein orthogonales System, und wenn $|a_{\varkappa\lambda}| = |b_{\varkappa\lambda}| = 1$ ist, so ist auch die De-

terminante von $\sum_\varkappa a_{\lambda\varkappa} b_{\mu\varkappa}$ gleich 1. Bezeichnen wir dieses neue, componirte System durch $c_{\lambda\mu}$, so sagt der STIELTJES'sche Satz, dass mit der Determinante n^{ter} Ordnung $|c_{\lambda\mu} + \varepsilon_{\lambda\mu}|$ auch alle ihre Subdeterminanten $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung verschwinden.

Bedeutet also $c_{\lambda\mu}$ ein beliebiges orthogonales System mit der Determinante $+1$, so ist der STIELTJES'sche Satz zugleich eine Verallgemeinerung und ein Specialfall des folgenden: *Mit der Determinante* $|c_{\varkappa\lambda} + \varepsilon_{\varkappa\lambda}|$ *verschwinden zugleich alle ihre Subdeterminanten* $(n-1)^{\text{ter}}$ *Ordnung, wenn* $c_{\varkappa\lambda}$ *ein orthogonales System mit der Determinante* $D = +1$ *bedeutet.*

Um diesen Satz zu beweisen, bezeichnen wir, ohne zunächst über das Vorzeichen von $D = |c_{\varkappa\lambda}|$ etwas festzusetzen, $|c_{\varkappa\lambda} + \varepsilon_{\varkappa\lambda}|$ nebst ihren Subdeterminanten durch $\Delta, \Delta_{\alpha\beta}, \Delta_{\alpha\beta,\gamma\delta}, \ldots$ Dann folgen aus den Gleichungen

$$\begin{vmatrix} c_{11}+1, & c_{21}, & \ldots, & c_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{1n}, & c_{2n}, & \ldots, & c_{nn}+1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots \\ c_{21} & c_{22} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11}+1, & c_{12}, & \ldots, & c_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1}, & c_{2n}, & \ldots, & c_{nn}+1 \end{vmatrix}$$

bezw.

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & \ldots \\ c_{12}, & c_{22}+1, & c_{32}, & \ldots \\ c_{13}, & c_{23}, & c_{33}+1, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_{11}, & c_{12}, & c_{13}, & \ldots \\ c_{21}, & c_{22}, & c_{23}, & \ldots \\ c_{31}, & c_{32}, & c_{33}, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} c_{11}+1-1, & c_{12}, & c_{13}, & \ldots \\ c_{21}, & c_{22}+1, & c_{23}, & \ldots \\ c_{31}, & c_{32}, & c_{33}+1, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} c_{11}+1, & c_{12}, & c_{13}, & \ldots \\ c_{21}, & c_{22}+1, & c_{23}, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} c_{22}+1, & c_{23}, & \ldots \\ c_{32}, & c_{33}+1, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

die Relationen

$$\Delta D = \Delta, \tag{6}$$

bezw.

$$\Delta_{11}(1 + D) = \Delta$$

oder statt der letzteren allgemeiner

$$\Delta_{\varkappa\varkappa}(1 + D) = \Delta. \tag{7}$$

Ebenso liefert

$$\begin{vmatrix} c_{11}+1, & c_{21}, & c_{31}, & c_{41}, & \dots \\ 1, & 0, & 0, & 0, & \dots \\ c_{13}, & c_{23}, & c_{33}+1, & c_{43}, & \dots \\ c_{14}, & c_{24}, & c_{34}, & c_{44}+1, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_{11}, & c_{12}, & \dots \\ c_{21}, & c_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} c_{11}+1, & c_{12}, & c_{13} & \dots \\ c_{11}+1-1, & c_{12}, & c_{13} & \dots \\ c_{31}, & c_{32}, & c_{33}+1, & \dots \\ c_{41}, & c_{42}, & c_{43}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

die Relation

$$\Delta_{12} D = -\Delta_{21}$$

oder ebenso allgemeiner

$$\Delta_{\varkappa\lambda} D = -\Delta_{\lambda\varkappa}. \qquad (\lambda \neq \varkappa) \tag{8}$$

Die angegebene Methode führt in derselben Weise auf weitere Gleichungen, deren Bildungsgesetz durch die folgenden Resultate leicht erkannt wird. Es ist

$$
\begin{aligned}
D\Delta &= \Delta\,. \\
D\Delta_{\varkappa\varkappa} &= \Delta - \Delta_{\varkappa\varkappa}\,, \\
D\Delta_{\varkappa\lambda} &= -\Delta_{\lambda\varkappa}\,, \\
D\Delta_{\varkappa\varkappa,\lambda\lambda} &= \Delta - (\Delta_{\varkappa\varkappa} + \Delta_{\lambda\lambda}) + \Delta_{\varkappa\varkappa,\lambda\lambda}\,, \\
D\Delta_{\varkappa\varkappa,\lambda\mu} &= -\Delta_{\mu\lambda} + \Delta_{\varkappa\varkappa,\mu\lambda}\,, \\
(9) \qquad D\Delta_{\varkappa\lambda,\mu\nu} &= \Delta_{\lambda\varkappa,\nu\mu}\,, \\
D\Delta_{\varkappa\varkappa,\lambda\lambda,\mu\mu} &= \Delta - (\Delta_{\varkappa\varkappa} + \Delta_{\lambda\lambda} + \Delta_{\mu\mu}) + (\Delta_{\lambda\lambda,\mu\mu} + \Delta_{\varkappa\varkappa,\mu\mu} + \Delta_{\varkappa\varkappa,\lambda\lambda}) \\
&\qquad - \Delta_{\varkappa\varkappa,\lambda\lambda,\mu\mu}\,, \\
D\Delta_{\varkappa\varkappa,\lambda\lambda,\mu\nu} &= -\Delta_{\nu\mu} + (\Delta_{\varkappa\varkappa,\nu\mu} + \Delta_{\lambda\lambda,\nu\mu}) - \Delta_{\varkappa\varkappa,\lambda\lambda,\nu\mu}\,, \\
D\Delta_{\varkappa\varkappa,\lambda\mu,\nu\rho} &= \Delta_{\mu\lambda,\rho\nu} - \Delta_{\varkappa\varkappa,\mu\lambda,\rho\nu}\,, \\
D\Delta_{\varkappa\lambda,\mu\nu,\rho\sigma} &= -\Delta_{\lambda\varkappa,\nu\mu,\sigma\rho}\,, \\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Hier bedeuten $\varkappa, \lambda, \mu, \nu, \rho, \sigma$ von einander verschiedene Zahlen.

Aus den erhaltenen Gleichungen wollen wir nun die auf unser Theorem bezüglichen Schlüsse ziehen. Wir hatten $D = 1$ und $\Delta = 0$ vorausgesetzt. Dann zeigt (7) sofort, dass alle $\Delta_{\varkappa\varkappa}$ verschwinden, und zwar liegt dieses Resultat in der Form einer identischen Gleichung vor. Multiplicirt man ferner die bekannte Relation, die übrigens auch aus (2) entnommen werden kann,

$$\Delta_{\varkappa\varkappa}\Delta_{\lambda\lambda} - \Delta_{\varkappa\lambda}\Delta_{\lambda\varkappa} = \Delta\,.\,\Delta_{\varkappa\varkappa,\lambda\lambda}$$

mit $(1 + D)^2$ und trägt in das Product die Resultate (6) und (7) ein, so folgt

$$(10) \qquad \Delta_{\varkappa\lambda}^2 D(1 + D)^2 = \Delta\{(1 + D)^2\Delta_{\varkappa\varkappa,\lambda\lambda} - \Delta\}$$

oder auch

$$(10') \qquad \Delta_{\varkappa\lambda}^2(1 + D)^2 = \Delta\{2(1 + D)\Delta_{\varkappa\varkappa,\lambda\lambda} - \Delta\}$$

oder endlich mit Hülfe von (9)

$$(10'') \qquad \Delta_{\varkappa\lambda}^2(1 + D)^2 = \Delta\{\Delta - 2\Delta_{\varkappa\varkappa} - 2\Delta_{\lambda\lambda} + 4\Delta_{\varkappa\varkappa,\lambda\lambda}\}.$$

Durch jede der Gleichungen (10) ist der noch übrige Teil des Stieltjes'schen Satzes in unserer Form mit Hülfe identischer Gleichungen ausgedrückt; denn es wird klargelegt, dass bei $\Delta = 0$, $D = +1$ alle $\Delta_{\varkappa\lambda}$ verschwinden müssen. Will man auch die Voraussetzung der Orthogonalität in die Formel selbst aufnehmen, so reicht es aus, nach Kronecker'scher Art zu schreiben:

$$\Delta_{\varkappa\varkappa}(1 + D) \equiv \Delta,$$

$$\Delta_{\varkappa\lambda}^2(1 + D)^2 \equiv \Delta\{2(1 + D)\Delta_{\varkappa\varkappa,\lambda\lambda} - \Delta\},$$

$$(\text{modd. } c_{\alpha 1}c_{\beta 1} + \dots + c_{\alpha n}c_{\beta n} - \varepsilon_{\alpha\beta}). \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n)$$

Wir können aus den aufgestellten Formeln noch weitere Schlüsse ziehen. Wir wollen voraussetzen, dass $D = -1$ sei. Dann muss wegen (6) die Determinante $\Delta = 0$ werden; wir wollen weiter annehmen, dass auch noch die Subdeterminanten $(n - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung von Δ verschwinden. Dann liefert (9) die 3 Gleichungen

$$-\Delta_{\varkappa\varkappa,\lambda\lambda} = +\Delta_{\varkappa\varkappa,\lambda\lambda},$$

$$-\Delta_{\varkappa\varkappa,\lambda\mu} = +\Delta_{\varkappa\varkappa,\mu\lambda},$$

$$-\Delta_{\varkappa\lambda,\mu\nu} = +\Delta_{\lambda\varkappa,\nu\mu},$$

deren erster wir das Resultat $\Delta_{\varkappa\varkappa,\lambda\lambda} = 0$ entnehmen. Die zweite liefert wegen der schon einmal benutzten Beziehung

$$\Delta_{\varkappa\varkappa,\lambda\lambda}\Delta_{\varkappa\varkappa,\mu\mu} - \Delta_{\varkappa\varkappa,\lambda\mu}\Delta_{\varkappa\varkappa,\mu\lambda} = \Delta_{\varkappa\lambda}\Delta_{\varkappa\varkappa,\lambda\lambda,\mu\mu}$$

in gleicher Weise $\Delta_{\varkappa\varkappa,\lambda\mu} = 0$. Es erscheint wahrscheinlich, dass auch alle $\Delta_{\varkappa\lambda,\mu\nu}$ verschwinden. Um diese Vermutung belegen zu können, greifen

wir auf die in der Einleitung gegebenen Formeln zurück und benutzen hier (3) in der Gestalt

$$(11)\qquad \Delta_{\varkappa\varkappa,\lambda\lambda}\Delta_{\mu\mu,\nu\nu}+\Delta_{\varkappa\lambda,\lambda\mu}\Delta_{\mu\varkappa,\nu\nu}+\Delta_{\varkappa\mu,\lambda\varkappa}\Delta_{\mu\lambda,\nu\nu}+\Delta_{\varkappa\mu,\lambda\nu}\Delta_{\mu\varkappa,\nu\lambda}$$
$$+\Delta_{\varkappa\varkappa,\lambda\nu}\Delta_{\mu\lambda,\nu\mu}+\Delta_{\varkappa\lambda,\lambda\nu}\Delta_{\mu\mu,\nu\varkappa}=\Delta\Delta_{\varkappa\varkappa,\lambda\lambda,\mu\mu,\nu\nu}.$$

Da man in jedem $\Delta_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ die ersten Indices α, γ oder die zweiten β, δ unter einander vertauschen kann, so bleibt links nach den bereits erhaltenen Resultaten wegen $\Delta_{\varkappa\varkappa,\lambda\lambda}=0$ und $\Delta_{\varkappa\varkappa,\lambda\mu}=0$ nur Ein nicht verschwindendes Glied, nämlich

$$\Delta_{\varkappa\mu,\lambda\nu}\Delta_{\mu\varkappa,\nu\lambda}=-\Delta^2_{\varkappa\mu,\lambda\nu}$$

zurück; und weil die rechte Seite wegen $\Delta=0$ verschwindet, so muss auch $\Delta_{\varkappa\mu,\lambda\nu}$ zu Null werden. Es zeigt sich also: *Ist $D=-1$, dann muss $\Delta=0$ sein; wenn auch alle Subdeterminanten $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung von Δ verschwinden, so verschwinden gleichzeitig auch alle Subdeterminanten $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung.*

Die Richtung, in welcher die weiteren Resultate zu suchen sind, ist jetzt ersichtlich: Wir nehmen zunächst $D=+1$, $\Delta=0$ und alle $\Delta_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ bei gleichen oder ungleichen Indices $=0$. Dann giebt (9)

$$\Delta_{\varkappa\varkappa,\lambda\lambda,\mu\mu}=-\Delta_{\varkappa\varkappa,\lambda\lambda,\mu\mu},$$
$$\Delta_{\varkappa\varkappa,\lambda\lambda,\mu\nu}=-\Delta_{\varkappa\varkappa,\lambda\lambda,\nu\mu},$$
$$\Delta_{\varkappa\varkappa,\lambda\mu,\nu\rho}=-\Delta_{\varkappa\varkappa,\mu\lambda,\rho\nu},$$
$$\Delta_{\varkappa\lambda,\mu\nu,\rho\sigma}=-\Delta_{\lambda\varkappa,\nu\mu,\sigma\rho}.$$

Hier folgt das Verschwinden der drei ersten Arten von Subdeterminanten durch die bereits zweimal besprochene Schlussführung. Für die letzte Art reicht es aus, auf (2) zurückzugreifen, darin $m_1=m_2=3$ zu setzen, und die erweiterte LAPLACE'sche Formel mit dem Anfangsgliede $\Delta_{\varkappa\varkappa,\mu\mu,\rho\rho}\Delta_{\lambda\lambda,\nu\nu,\sigma\sigma}$ aufzustellen; auf deren linker Seite bleibt alsdann nur $\Delta_{\varkappa\lambda,\mu\nu,\rho\sigma}\Delta_{\lambda\varkappa,\nu\mu,\sigma\rho}$ von Null verschieden. Daraus folgt das erwarterte Ergebnis.

Das allgemeine Resultat unserer Untersuchungen ist also das folgende: *Je nachdem $D=+1$ oder $=-1$ ist, sind die ersten nicht sämtlich verschwindenden Subdeterminanten von Δ von der Ordnung $(n-2m)$ bezw. $(n-2m-1)$, wobei m eine positive Zahl oder die Null bedeutet.*

Endlich möge noch erwähnt werden, dass, wenn man in (4) und (5) für die $a_{\varkappa\lambda}$ das Einheitssystem einführt, eine Reihe von Beziehungen zwischen den Subdeterminanten von Δ sich ergiebt. So findet man z. B. für $k = 1$

$$|c_{\varkappa\lambda}|\,\Delta_{\alpha\beta} = \sum_{\varkappa} \Delta_{\alpha\varkappa} c_{\varkappa\beta}.$$

Giessen d. 19. Mai 1894.

NEUE THEORIE DER EINDEUTIGEN PERIODISCHEN TRANSFORMATIONEN IN DER EBENE

VON

S. KANTOR

Die Methode, nach welcher ich die Theorie der periodischen Transformationen in Angriff genommen habe,[1] um das Typentheorem aufzustellen und diese Typen zu construiren, bestand darin, vorher ein rein arithmetisches Problem zu lösen, welches sich in die Untersuchungen der Herren HERMITE und FROBENIUS über quadratische Formen einreiht, und auf die erhaltenen Resultate die geometrische Construction anzuwenden.

Es eröffnet sich aber noch ein anderer Weg, um die Theorie aufzustellen. Der Übergang vom arithmetischen zum geometrischen Theile bestand in der Herbeiziehung einer gewissen Art von Curven, welche unter ihren Punkten eindeutige Correspondenzen gestatten. Diese Identität eben des geometrischen Theiles der älteren Theorie mit diesem letzteren Probleme führt zu einer ganz verschiedenen Art, die Theorie der *existirenden* periodischen Transformationen zu begründen. Während ich in meiner Preisschrift a posteriori die cubischen und hyperelliptischen Curven allein anwandte, nehme ich jetzt allgemeinere Curven der vorher genannten Eigenschaft zum Ausgangspunkte. Ich verlasse das binäre Gebiet der Curve, um mich mittelst ihrer in der Ebene zu orientiren und reciprok studire ich die Correspondenz in der Curve, indem ich ihr eine Verwandlung der Ebene zuordne.

---

[1] In der Preisschrift: *Premiers fondements pour une théorie des transformations périodiques univoques,* Nâples 1891. Cf. auch den im Journale für reine u. ang. Math. Bd. 114, p. 50 erschienenen Auszug.

Der unschätzbare Vortheil der neuen Theorie besteht darin, dass sie nicht die Kenntniss der Fundamentalsysteme nöthig hat; man kann sogar umgekehrt alle arithmetischen Eigenschaften der Fundamentalsysteme daraus herleiten. Andererseits wird die gegenwärtige Theorie die von mir als *illusorisch* bezeichneten Characteristiken nicht liefern und um so bemerkenswerther ist die Controle der existirenden Typen, welche durch die einfachen Methoden dieser Arbeit geliefert wird, während die ältere Theorie mühsam und Irrthümern unterworfen war. Die Entdeckung der Typen ist gegenwärtig auf drei berühmte Probleme zurückgeführt, an welchen die moderne Algebra emporgewachsen ist und ihre Tragweite erproben konnte:

1. Die Berechnung der 27 Geraden einer cubischen Fläche, welche hier aber particulär ist,

2. Die Berechnung der 28 Doppeltangenten einer Curve 4. Ordnung, welche ebenfalls particulär ist,

3. Die Berechnung gewisser dreifach berührender Kegelschnitte einer bereits von Herrn Nöther bemerkten Curve 6. Ordnung $p = 4$.

Ich habe jedoch diese Kalküle durch die Vergleichung mit meiner Preisschrift ersetzt, umsomehr, da dieselben Kalküle in der Theorie der Gruppen birationaler Transformationen wiederholt werden müssen.

I. THEIL.

Untersuchungen über die invarianten Curven in einer birationalen Transformation.

§ 1. *Allgemeines.*

1. Obzwar ich keinen directen Gebrauch davon mache, schicke ich einige Theoreme über die eindeutigen Correspondenzen in den algebraischen Curven i. A. voraus. Die Untersuchungen von Riemann über die eindeutige Transformation einer algebraischen Function enthalten implicite ein Theorem, welches ausgesprochen werden möge:

Lemma. Wenn zwei Curven F_1, F_2 eine eindeutige analytische Beziehung gestatten, sodass die Riemann'schen Flächen ohne Zerreissung und unter Gleichheit sämmtlicher Moduln conform auf einander abbildbar sind, kann man immer eine eindeutige Substitution finden, welche die Curve F_1 in die Curve F_2 transformirt, oder geometrisch:

I. Theorem. *Wenn irgendwie zwischen zwei Curven eine gegenseitig eindeutige Correspondenz entsteht, ist diese Correspondenz immer in einer eindeutigen Transformation*

$$y_1 : y_2 : y_3 = \Phi_1(x) : \Phi_2(x) : \Phi_3(x) \tag{1}$$

enthalten, und indem man sich des eigentlich als Riemannisch zu bezeichnenden Theoremes bedient,

II. Theorem. *Wenn man eine Curve C eindeutig in C'' mittelst*

$$y_1 : y_2 : y_3 = \Phi_1(x) : \Phi_2(x) : \Phi_3(x)$$

transformirt, so ist die eindeutige Correspondenz zwischen C und C'' auch in einer eindeutigen Transformation

$$x_1 : x_2 : x_3 = \Psi_1(y) : \Psi_2(y) : \Psi_3(y) \tag{2}$$

enthalten, erhält man sofort

III. Theorem. *Eine eindeutige Correspondenz, welche geometrisch unter zwei Curven C und C'' resultirt, ist immer in einer in den x und gleichzeitig in einer in den y rationalen Transformation enthalten.* [1]

IV. Theorem. *Wenn für dieselbe Correspondenz zwei Transformationen* (1) *existiren, existirt eine Unendlichkeit.*

Beweis. Aus

$$y_1 : y_2 : y_3 = \Psi_1(\overset{m}{x}) : \Psi_2(\overset{m}{x}) : \Psi_3(\overset{m}{x}),$$

$$y_1 : y_2 : y_3 = \Phi_1(\overset{m+\nu}{x}) : \Phi_2(\overset{m+\nu}{x}) : \Phi_3(\overset{m+\nu}{x})$$

folgt sofort

$$y_1 : y_2 : y_3 = \{\Psi_1(\overset{m}{x}) \,.\, X(\overset{\nu}{x}) + \Phi_1(\overset{m+\nu}{x})\} : \{\Psi_2(\overset{m}{x}) \,.\, X(\overset{\nu}{x}) + \Phi_2(\overset{m+\nu}{x})\} : \{\Psi_3(\overset{m}{x}) \,.\, X(\overset{\nu}{x}) + \Phi_3(\overset{m+\nu}{x})\}$$

wo X eine willkürliche Function sein kann.

[1] Das I., II. und III. Theorem gelten genau so nicht nur für zwei M_{r-1} im R_r, sondern auch für zwei algebraische M_i im R_r, welche sich analytisch eindeutig entsprechen.

2. Jede Transformation (1) ändert die Schnitte von C mit den φ_{n-3} in die Schnitte von C' mit den φ' dieser, aber da eine adjungirte φ_{n-3} eindeutig durch die Schnitte mit C bestimmt ist, findet man so, dass die Transformation eine lineare Transformation H unter den φ_{n-3} und $\varphi'_{n'-3}$ (als Individuen betrachtet) hervorbringt, während sie die φ_{n-3} selbst in ein anderes System als die $\varphi'_{n'-3}$ verwandelt.[1]

Sobald es möglich ist, den Singularitätencomplex der φ zu einem unicursalen Netze zu ergänzen (also *im* Systeme der φ eine solches Netz zu construiren) wird man unmittelbar eine Transformation (1) von C in C' haben. Denn das Netz und das ihm entsprechende (nicht unicursale) von φ' bestimmen eine wahre Punkttransformation der Ebene, welche auch die Punkte von C in die entsprechenden Punkte von C' verwandelt. Aber diese Ergänzung ist i. A. unmöglich, z. B. wenn der Singularitätencomplex eine Dimension $u < 0$ hat.

Ein beliebiges Netz von Curven φ_{n-3} und das entsprechende Netz von $\varphi'_{n'-3}$ bestimmt eine Punkttransformation

$$(3) \qquad \Phi_1(y) : \Phi_2(y) : \Phi_3(y) = \Psi_1(x) : \Psi_2(x) : \Psi_3(x)$$

welche die Correspondenz zwischen C und C' enthält und man hat

V. Theorem. *Wenn zwei Transformationen* (3) *für dieselbe Correspondenz existiren, existirt eine Unendlichkeit.*

Beweis. Man schreibt ihre Formeln wie folgt:

$$\Phi_i(y)\varphi(y) + \Phi'_i(y)\varphi'(y) = \Psi_i(x)\psi(x) + \Psi'_i(x)\psi'(x)$$

wo φ, ψ zwei willkürliche Functionen sind.

[1] Herr Painlevé begeht in seiner Abhandlung: *Mémoire sur les équations différentielles du premier ordre,* Ann. de l'Ecole Normale, 1891—92, einen Irrthum, wenn er sagt, dass die einfach rationale Transformation die adjungirten φ_{n-3} von C in die adjungirten $\varphi'_{n'-3}$ von C' überführe. Sie führt die φ_{n-3} in ganz gleichgiltige Curven über, nur der Schnitt der φ_{n-3} mit C wird in den Schnitt der $\varphi'_{n'-3}$ mit C' übergeführt. Aus dieser Verwechslung stammt seine falsche Formel $\mu = \frac{p'-1}{p-1}$. Die Transformation z. B. $x'_i = x_i^2$ führt eine C_4 $p = 3$ in eine C_8 $p' = 21$ über und es ist $\mu = 4$. Dass für $p = 1$ μ willkürliche Werthe annehmen kann, ist gewiss; aber es ist durchaus nicht bewiesen, dass eine 1-μ-deutige Correspondenz in einer elliptischen oder auch nur in einer cubischen Curve stets auch in einer 1-μ-deutigen Transformation der Ebene enthalten wäre.

3. Wenn die Correspondenz auf C allein ist, coincidiren die linearen ∞^{p-1} Systeme der φ_{n-3} und $\varphi'_{n'-3}$ und die Homographie H stellt i. A. die Correspondenz dar.

VI. Theorem. *Wenn die Homographie H mit einer Punkttransformation* (1) *der Ebene identisch ist, ist diese Transformation nothwendig birational.*

Beweis. Die vorausgesetzte Transformation reproducirt das lineare System ∞^{p-1} der φ_{n-3}. Ein willkürliches Büschel dieses Systemes ist in ein anderes verwandelt, sodass die variabeln Basispunkte in die variabeln Basispunkte übergehen und (1) verwandelt also überall in der Ebene eine Zahl m von Punkten in dieselbe Zahl m, was erfordert, dass (1) auch von Seite der $\varphi'_{n'-3}$ eindeutig sei. Es bleibt der Fall $p = 2$. Wenn die φ_{n-3} selbst $p' = 0$ oder 1 haben, transformirt man C in eine Curve C_n mit a^{n-2} oder in eine Curve C_6 mit 8 Doppelpunkten und die Transformation wird später wirklich construirt werden. Wenn die φ_{n-3} $p' > 1$ haben, wendet man das im § 2 zu entwickelnde Verfahren an.

4. Es ist nothwendig, den Fall zu erwähnen, wo alle Curven φ zerlegt sind.

VII. Theorem. *Wenn alle Curven φ sich zerlegen, so kann dies nur auf zwei Arten geschehen:*

1. *Alle Curven φ zerlegen sich in eine feste Curve der Ordnung μ und in ein ∞^{p-1} System der Ordnung $n - 3 - \mu$.*

2. *Alle Curven φ zerlegen sich in λ variable Bestandtheile einer selben Ordnung μ, welche ein lineares System von ν Dimensionen bilden, wo $\lambda\mu = n - 3$ und $\lambda\nu = p - 1$.*

Beweis. Die Zerlegung der φ ist immer eine Consequenz der Singularitäten von C_n. Wenn also in Folge dieser Singularitäten eine beliebige der φ_{n-3} sich zerlegt, zerlegt sich jede in derselben Weise, etwa in φ_μ und $\varphi_{\mu'}$, wo alle φ_μ dieselben Singularitäten haben und ebenso alle $\varphi_{\mu'}$. Wenn φ_μ die Dimension 0 bekommt, bildet sie einen Bestandtheil aller φ und die $\varphi_{\mu'}$ sind ∞^{p-1}. Wenn φ_μ nicht durch seine Singularitäten bestimmt ist und es also wenigstens ein Büschel gibt, sind durch $p - 1$ willkürliche Punkte 2^{p-1} Curven $\varphi_\mu + \varphi_{\mu'}$ bestimmt, sobald die φ_μ von den $\varphi_{\mu'}$ differiren, was dem widerspricht, dass die φ ein lineares System bilden sollen.

VIII. Theorem. *Die Zahl ν des Theoremes VII kann nicht > 1 sein.*

Beweis. Man kann auf

$$\binom{p-1}{\nu}\binom{p-1-\nu}{\nu}\cdots\binom{2\nu}{\nu} : 1 \ldots \lambda$$

Arten $p-1$ Punkte in λ Gruppen zu ν theilen und dies ist die Zahl der Curven φ_{n-3}, welche durch die $p-1$ Punkte bestimmt sind, während doch durch die $p-1$ Punkte nur eine φ_{n-3} gehen soll.

IX. Theorem. *Im zweiten Falle von VII müssen die φ_μ rational sein, wenn $p > 2$.*

Beweis. Der 2. Fall der Zerlegung kann nur eintreten, wenn die Zahl p' für die Basis der $\varphi < 0$ ist. Mittelst einiger Hilfssätze, welche in der nächsten Nummer folgen, beweist man nun, dass die Basispunkte vollständig unabhängig sein und die ganze Basis des Büschels einschliessen müssen. Dann muss dieselbe Eigenschaft auch in Bezug auf die einzelnen Bestandtheile gelten, was für diese nur statt haben kann, wenn sie rational sind.

X. Theorem. *Im 2. Falle von VII ist für $p > 2$ die Curve C hyperelliptisch.*

Beweis. Das Büschel von rationalen Curven, welches die Matrix der adjungirten φ_{n-3} ist, kann birational in ein Büschel von Geraden übertragen werden und hiermit nothwendig die Grundcurve in eine Curve C_n mit $(n-2)$-fachem Punkte, also hyperelliptisch. Für $p = 2$ sehe man XII.

Man kennt das umgekehrte Theorem, dass für jede hyperelliptische Curve $p > 2$, $u > 0$ die adjungirten φ_{n-3} sich in mehrere Curven eines Büschels theilen, woraus sofort folgt:

XI. Theorem. *Jede hyperelliptische Curve mit $p > 2$, $u > 0$ kann birational in eine Curve der Ordnung n mit einem $(n-2)$-fachen Punkte transformirt werden.*

Eine Consequenz dieses Theoremes, dass lineare Systeme hyperelliptischer Curven $p > 2$ birational äquivalent sind mit Systemen $C_n a^{n-2}$ beweist auch die von allen g_1^2 eines Büschels gebildete Transformation.

XII. Theorem. *Jedes* ∞^i *System, wo* $i > 2$, *von Curven mit* $p = 2$, *ist birational äquivalent einem Systeme von* C_6 *mit* 8 *Doppelpunkten oder einem Systeme von* C_4 *mit einem Doppelpunkte.*

Zum Beweise bedient man sich VII, § 2, n° 1 und XXIII.

5. Die bei IX erwähnten Hilfstheoreme sind:

XIII. Theorem. *Ein lineares System von Curven, dessen Basis eine Specialgruppe der Ebene bildet, kann niemals das vollständige System adjungirter* φ_{n-3} *einer irreductiblen algebraischen Curve sein, ausgenommen den Fall, wo eine Fundamentalcurve existirt.*

Ich habe dieses Theorem nachträglich in meinen Vorlesungsheften nach Prof. Christoffel (Sommer 1879) gefunden, wo es bewiesen ist durch die genaue Identität unter der Zahl der unabhängigen Integrale erster Art und der Zahl p, welche numerisch aus den Singularitäten abgeleitet ist.

XIV. Theorem. *Wenn das System* φ_{n-3} *einer irreductibeln Curve eine Fundamentalcurve besitzt, so kann diese nicht* $p' > 1$ *haben.*

Man beweist das Theorem zuerst für Fundamentalcurven mit gleichen Vielfachheiten, indem man daraus herleitet, dass $p < 0$ und man schliesst daraus a fortiori auf die Curven mit willkürlichen Singularitäten.

XV. Theorem. *Das vollständige System der adjungirten* φ_{n-3} *einer algebraischen Curve mit* $p > 2$ *kann keine von den übrigen abhängigen gemeinsamen Punkte haben, welche nicht gleichzeitig vielfache Punkte der Grundcurve sind.*

Beweis. Entweder würde man Curven C_n von verschiedenen p construiren können, welche dasselbe vollständige System φ_{n-3} haben, oder die Gesammtheit der Basispunkte müsste auch für die C_{n+3} eine nothwendige sein, und ebenso für $C_{n+6}, \ldots$. Man beweist aber durch numerische Relationen, dass dies nicht stattfinden könne, ohne dass C_{n+3} sich zerlegte.

XVI. Theorem. *Es existirt keine irreductible Curve, deren allgemeine* φ_{n-3} *sich zerlegt, ohne dass* $p' < 0$.

Beweis. In diesem Falle muss die Zahl der Schnittpunkte von φ_{n-3} mit einem der Bestandtheile excessif sein; dies gilt dann umsomehr für C_n, welche also dieselbe Curve als Bestandtheil enthalten müsste.[1]

§ 2. *Die Äquivalenztheoreme.*

1. Ich werde also jetzt eine Curve C_n mit $p > 1$ voraussetzen, welche durch eine birationale Transformation reproducirt sei. In der Collineation H unter den φ_{n-3} existiren p invariante Functionen, wenn nicht eine Unendlichkeit, wobei der Fall eintreten kann, dass alle p Curven sich in eine einzige vereinigen und auch der, dass keine φ invariabel sei, welche $p > 1$ hätte.

Meine Methode besteht nun darin, dass ich auf die invariante Curve φ des Systemes denselben Schluss wie den über C_n gemachten anwende und es nur als ein scheinbares Hindernis betrachte, wenn in Folge einer particulären Eigenschaft der C_n die feste Curve φ nicht $p > 2$ haben sollte. Denn die wahre Wichtigkeit ist den allen Curven φ gemeinsamen Singularitäten zuzuschreiben und statt also mich einer einzigen Curve φ zu bedienen, und daran die Bildung adjungirter φ' zu knüpfen, sage ich, weil das System φ' dasselbe ist für jede allgemeine unter den φ, dass die φ' das zweite adjungirte System der C_n bilden. Es versteht sich von

---

[1] Ich mache bei dieser Gelegenheit auf das folgende Theorem aufmerksam, welches von ganz besonderer Wichtigkeit scheint und von dem sich nirgends eine Spur findet:

Wenn p das Geschlecht, u die Dimension, σ die Anzahl der Punkte eines Singularitätencomplexes sind, so ist der Rang K des adjungirten Systemes φ

$$3p - u - \sigma + 6.$$

Beweis. Es ist

$$6p = 3(n-1)(n-2) - 3\sum_1^\sigma (\alpha - 1)\alpha,$$

$$2u = n(n-3) \qquad - \sum_1^\sigma (\alpha + 1)\alpha$$

und

$$K = (n-3)^2 - \Sigma(\alpha - 1)^2 = (n-3)^2 - \Sigma\alpha^2 + 2\Sigma\alpha - \sigma$$

woraus die Formel folgt.

selbst, dass wenn das System der Curven φ nach der ersten Art des VII. Theoremes zerlegt ist, die Curven φ' nur für das Restsystem φ' zu bilden sind und was den festen Bestandtheil betrifft, ist es ganz gleichgiltig, in was sich derselbe verwandelt, ob in sich selbst oder, indem er als Fundamentalcurve erscheint, in einen Fundamentalpunkt. Dieser Übergang zu den adjungirten Curven der adjungirten ist ein auch in anderen Untersuchungen sehr nützlicher Process und ich habe ihn in meiner ersten in den Comptes rendus der Academie de Paris, 9. Februar 1885, das Princip der Verminderung der Functionen φ genannt.

Aber diese Reihe von Curven φ bietet manchmal Schwierigkeiten, welche ihren Verfolg und die Anwendung auf unseren Zweck, die Reduction der Transformationen und der Curven, complicirt macht. Ich gehe daher so vor.

XVII. Theorem. *Eine birationale Transformation, welche eine algebraische Curve C_n in sich selbst verwandelt, verwandelt auch jedes System der Reihe der successiven adjungirten Curven in sich selbst.*

Oder allgemeiner: Wenn eine birationale Transformation eine Curve C in eine Curve C' verwandelt, verwandelt sie die Reihe der successiven adjungirten Curven in die zu C' gehörenden Reihe oder

XVIII. Theorem. *Gegen birationale Transformation der Ebene sind nicht nur die von den adjungirten Curven φ_{n-3} ausgeschnittene sondern auch die von den successiven adjungirten Curvensystemen ausgeschnittenen Reihen invariant.*

2. Man hat bisher nicht bemerkt, dass man die Reihe der Systeme auch nach der anderen Richtung vervollständigen, also die Reihe der successiven Curven construiren muss, welche ein gegebenes System als n^{tes} adjungirtes System haben. Unter Anwendung einiger Vorsicht kann man aussprechen:

XIX. Theorem. *Alle inversen adjungirten Systeme einer Curve C_n sind invariant für birationale Transformation der Ebene und ebenso die durch diese Systeme auf der Curve C_n ausgeschnittenen Reihen.*

Es ist nothwendig, hier auf eine Classe algebraischer Curven auf-

merksam zu machen, in deren adjungirter Reihe ein System hyperelliptischer Curven $p > 2$ vorkommt. Man kann sie *Jonquièressche Curven* nennen.

3. Ich verfolge also die Reihe der successiven φ bis zur Ordnung 3 oder 2 oder 1, falls nicht zuvor ein hyperelliptisches System auftritt und mit Benutzung meiner Bemerkung über den Fall 1° des VII. Theoremes. Dieser Verfolg kann jedoch unterbrochen werden, und wird bei einer nicht typischen Transformation stets unterbrochen werden müssen, auf folgende Weise.

1) Es sei an einer gewissen Stelle $p = 2$, $p' = 0$, also ein Büschel rationaler Curven φ eingetreten. Die birationale Transformation, welche es in ein Geradenbüschel verwandelt, zeigt, dass C eine Jonquièressche Curve ist und aber es gilt:

XX. Theorem. *Eine birationale Transformation, welche eine Jonquièressche Curve in sich selbst verwandelt, ist äquivalent einer Transformation von Jonquières mit zwei coincidirenden $(n - 1)$-fachen Punkten.*

2) Wenn an einer Stelle sich findet $p = 3$, $p' = 0$, also ein Netz rationaler φ, so verwandle ich dasselbe in ein Geradennetz und hiermit die Transformation in eine *Collineation.*

3) Wenn $p > 0$ und $p' = 0$, reproducirt die Transformation ein ∞^{p-1} System von Curven φ linear und daher wenigstens ein $\infty^{p-2}, \ldots, \infty^2$ System. Das ∞^2 System, welches immer existirt, ist birational äquivalent einem Geradennetze und die Transformation also übertragbar in eine Collineation.

4) Wenn an einer Stelle $p = 2$, $p' = 1$, so reproducirt die Transformation ein Büschel elliptischer Curven und ist äquivalent einer Transformation, welche ein Büschel von Curven C_{3s} mit 9 s-fachen Punkten in sich transformirt,[1] sodass alle Grundcurven ebenfalls elliptisch wären.

---

[1] Der Beweis dieses Theoremes möge hier angedeutet werden. Die bekannte Formel von Nöther

$$-\delta[\delta + 2(r_1 + r_2 + r_3) - 3r_3] - 2(r_1 r_2 - r_3^2) - K(r_3 - 1) \geqq 0$$

wo $n = r_1 + r_2 + r_3 + \delta$ und K der Rang des Systemes, gibt für $K = 0$, indem man $r_1 r_2 = r_3^2$ und $r_1 = r_2 = r_3$ voraussetzt, zwei Fälle $n = 3r_1$ oder $n < 3r_1$. Mittelst XXV beweist man für $n = 3r_1$, dass das einzige mögliche Büschel jenes ist, wo alle Scheitel gleich vielfach sind und für $n < 3r_1$, dass Reductibilität eintritt. $n > 3r_1$ ist unmöglich wegen XXXI.

Der einzige Fall, welcher erlaubt, für die adjungirten Curven einen der Basispunkte zu vernachlässigen, ist $s = 1$, die Grundcurve eine C_6 mit 8 Doppelpunkten.

XXI. Theorem. *Die Curven $p = 2$ mit $p' = 1$ sind birational den Curven $C_6 a_1^2 \ldots a_8^2$.*

5) Wenn $p = 3$, $p' = 1$, erhält man ein Netz elliptischer Curven und man wird das Theorem anwenden,[1] dass ein solches Netz äquivalent einem Netze von C_3 mit 7 festen Punkten ist. Die Transformation ist also birational äquivalent einer anderen, welche ein Netz von C_3 durch 7 Punkte reproducirt, da hier nur vollständige Systeme auftreten.

6) Wenn $p > 3$, $p' = 1$, hat man den Fall von n° 3 und wieder eine Transformation, welche die C_3 durch 7 Punkte reproducirt.

7) Wenn $p' > 1$, würde man auf dieses lineare System die Äquivalenztheoreme anwenden können, was jedoch die Discussion einer grossen Anzahl Fälle erfordert. Ich gehe daher vorwärts in der Reihe der φ. Wenn $p'' = 0$, $p' = 2$, ist wieder der Fall 1) vorhanden.

8) $p'' = 0$, $p' = 3$ gibt eine Collineation und $p'' = 0$, $p' > 3$ erledigt sich wie 3) oder 6).

9) $p'' = 1$, $p' = 2$ und $p' = 1$, $p' = 3$ oder $p'' = 1$, $p' > 3$ erledigen sich wie 4), 5), 6).

Man sieht, wie man vorgehen muss für $p'' > 1$, $p''' > 1$, u. s. w. Man wird sicherlich zu einem $p^{(i)} = 1$ oder $p^{(i)} = 0$ gelangen, eventuell nach Verwendung von VII. Wenn nicht, wird man fortfahren, bis die Ordnung der φ auf 3 oder 2 oder 1 reducirt ist. Alsdann wird man entweder haben

1) eine Transformation, welche ein ∞^i System ($i \geq 2$) von C_3 reproducirt;

2) eine Transformation, welche ein Netz und also auch ein Büschel von Kegelschnitten reproducirt und äquivalent ist einer Transformation von Jonquières;

3) eine Transformation, welche ein Netz von Geraden reproducirt, also eine Collineation ist.

---

[1] Das Theorem rührt von Bertini her und ist neuerdings von Martinetti bewiesen worden.

Für 1) ist das folgende Theorem entscheidend:

XXII. Theorem. *Eine birationale Transformation, welche ein System von C_3 mit 5, 6, 7, 9 gemeinsamen Punkten in sich verwandelt, hat alle ihre Fundamentalpunkte unter diesen Basispunkten.*

Beweis. Man hat $3n - \sum_1^q \alpha_j = 3$, wo $q < \sigma$, die Zahl aller Fundamentalpunkte, aber auch $3(n-1) = \sum_1^\sigma \alpha_j$, was $q = \sigma$ erfordert.

4. Bevor ich die Consequenzen hieraus ziehe, will ich von einer Formel sprechen, welche ich in der citirten Note erwähnt habe.[1] Es sei $n, y_1 \ldots y_\sigma$ ein Singularitätencomplex mit den Zahlen p, n. Wenn p', n' die Zahlen des 1. und p'', n'' jene des 2. adjungirten Complexes sind, ist

$$2p = (n-1)(n-2) - \sum_1^\sigma y(y-1),$$

$$2p' = (n-4)(n-5) - \sum_1^\sigma (y-1)(y-2),$$

$$2p'' = (n-7)(n-8) - \sum_1^\sigma (y-2)(y-3)$$

und nach Subtraction

$$p' - p + 3(n-3) = \Sigma(y-1),$$

$$p'' - p' + 3(n-6) = \Sigma(y-2)$$

und durch neue Subtraction

$$(1) \qquad 2p' - p - p'' = \sigma - 9.$$

[1] Cf. auch die citirte Preisschrift IV. Theil § 4, p. 303. In n° 28 seiner *Ricerche etc.*, welche er 1891 publicirt hat, schreibt G. Castelnuovo eine zweitheilige Formel, welche mit geänderten Bezeichnungen dieselbe ist wie 2) im Texte, welche ich bereits 1885 in den Comptes rendus erwähnt hatte. Ich constatire, dass der eben citirte § 4 im Monate März 1889 in Neapel gedruckt wurde (dass ich die Ricerche im April 1892 erhalten habe) und dass die Formel von Castelnuovo viel weniger sagt, weil sie eine *Ungleichheit* ist, während ich eine Gleichung gebe; dass er niemals die Zahl σ einführt, welche den Angelpunkt meiner Theorie bildet, und dass selbst so seine Formel ungenau ist, indem das eine Glied seiner Disjunction zu eng ist, und dass er wie natürlich zur Formel (3) nicht gelangt ist.

XXIII. Theorem. *Zwischen drei successiven Zahlen p, p', p'' existirt die Relation*

$$(2) \qquad 2p' - p - p'' = \sigma - 9.$$

XXIV. Theorem. *Zwischen vier successiven Zahlen p, p', p'', p''' existirt die Relation*

$$(3) \qquad 3(p' - p'') = p - p'''.$$

[Wenn man will, kann man aus (2) eine neue Methode für die Frage der maximalen Dimension bei gegebenem p herleiten, denn damit für gegebenes p' das p ein Maximum sei, muss $\sigma + p''$ ein Minimum sein, woraus äusserst leicht die bekannten Resultate folgen.]

Damit die Zahlen p gleich seien, muss $\sigma = 9$ sein.

XXV. Theorem. *Unter den Singularitätencomplexen mit denselben Zahlen p und σ hat jener die kleinste Zahl n, für welchen die Werthe y am nächsten einander gleich sind.*

Beweis. Ich verweise auf Sturm: *Über die Curven auf Flächen 3. Ordnung,* Math. Ann, Bd. 21, p. 457, wo die anzuwendenden Formeln sich bereit finden.

XXVI. Theorem. *Man kann nur auf 4 Arten auf 9 Punkte einen Singularitätencomplex derart vertheilen, dass er $p = n$ habe.*

Beweis. Für die Curven $n = 3\nu$ hat man einen Complex $\nu, \ldots \nu$, welcher gibt $p = u = 1$, also gibt jeder andere $u > p$. Für die Curven $u = 3\nu + 1$ gibt der Complex $y_1 = y_2 = \nu + 1$, $y_3 = \ldots = y_9$, $p = u = \nu$. Für die Curven $u = 3\nu + 2$ hat man einen Singularitätencomplex $y_1 = \ldots = y_5 = \nu + 1$, $y_6 = y_7 = y_8 = y_9 = \nu$, welcher gibt $p = u = \nu$, oder $y_1 = \nu + 2$, $y_2 = y_3 = \nu + 1$, $y_5 = \ldots = y_9 = \nu$, also $p = u = 2\nu$.

XXVII. Theorem. *Die Reihe der Complexe $p = p' = \ldots = 1$ ist nicht constructibel. Die einzige constructible Curve $C_{3\nu}$ mit 9 ν-fachen Punkten besitzt eine adjungirte C_3 $(\nu - 1)$-fach gezählt durch die 9 Punkte.*

Beweis. Mit Hilfe der elliptischen Parameter für die 9 Basispunkte genommén auf der C_3, welche sie bestimmen.

5. Ich führe noch die folgenden nützlichen Theoreme an:

XXVIII. **Theorem.** *Es existirt kein Büschel von* $p = 1$ *mit weniger als* 9 *Punkten.*

XXIX. **Theorem.** *Es existirt keine Curve mit* $p = 2$, $u \leqq 2$ *mit weniger als* 10 *Punkten.*

Diese Theoreme können fortgesetzt werden und eröffnen eine ganz neue Kategorie von Problemen.

XXX. **Theorem.** *Es existirt keine Curve, welche* $p = 1$, $p' = 1$, $p'' \gtrless 1$ *haben würde, obzwar die Formel* (2) *hierüber nicht entscheidet.*

Diese Theoreme beseitigen einige leicht zu bildende Einwürfe, welche man gegen das Vorwärtsgehen in der Reihe der successiven Curven φ erheben kann. Aus dem bei XXI citirten Theoreme schliesse ich:

XXXI. **Theorem.** *Es gibt kein Büschel elliptischer Curven, wo nicht ein vielfacher Punkt* $\geqq \frac{n}{3}$ *existiren würde.*

Ich glaube sogar, dass man obere Grenzen der Ordnung angeben kann, über welche hinaus Büschel mit weniger als 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 vielfachen Punkten $\geqq \frac{n}{3}$ nicht existiren.

Ebenso kann man mit Hilfe des Theoremes XXV aus den Formeln

$$p = \frac{s^2 - s + 2}{2},$$

$$u = \frac{s^2 + s}{2}, \qquad k = 9s^2 - 8s^2 = s^2$$

für die Curven $C_{3s} 9a^s$ schliessen:

XXXII. **Theorem.** *Es existirt kein* ∞^x *System* $x \geqq \frac{s^2+s}{2}$ *mit* $p = \frac{s^2-s+2}{2}$ *ohne einen Basispunkt* $\geqq \frac{n}{3}$.

Im 2. Theile wird das folgende Theorem verwendet werden.

XXXIII. **Theorem.** *Für die algebraischen Curven mit* 5, 6, 7, 8 *s-fachen*

Punkten existirt kein anderes lineares Curvensystem, welches auf C_{3s} dieselbe Reihe ausschnitte wie die Curven $C_{3(s-1)}$ (oder C_{3n}).

Es wird durch die Berechnung der Ordnung der Reihen bewiesen und hieraus geschlossen

XXXIV. Theorem. *Alle einfach rationalen Transformationen, welche ein System von C_{3s} mit 5, 6, 7, 8 s-fachen Punkten reproduciren, wo s jeden ganzen Werth > 0 annehmen kann, sind nothwendig birational.*

6. Ich gehe nun daran, das Gesammtresultat auszusprechen.

XXXV. Theorem. *Wenn eine birationale Transformation eine unendliche Anzahl von Doppelpunkten oder von Cyclen eines selben Indexes i besitzt und dieselben wenigstens eine irreductible Curve $p > 1$ erfüllen, kann man die Transformation birational in eine Transformation einer der folgenden Arten übertragen:*

1. *Eine Transformation, welche nicht mehr als 4, 5, 6, 7, 8 Punkte in der Charakteristik hat.*
2. *Eine Transformation von Jonquières, welche zwei coincidirende $(n-1)$-fache Punkte besitzt,*
3. *Eine Collineation.*

Indem man sich der Resultate der cit. Abh. bedient, überzeugt man sich, dass die einzigen Transformationen der n° 1, welche eine Curve von Doppelpunkten mit $p > 1$ besitzen, die zwei involutorischen Typen Θ_2 und Σ_2 und der von mir entdeckte Typus des Indexes 3 und der Ordnung 13 sind, dass es keine aperiodische Transformation mit ∞^1 Cyclen eines selben Indexes in einer Curve mit $p > 1$, ausgenommen die l. c. IV. Theil, § 7 n. 7 entdeckte Classe von Jonquières'chen Transformationen, gibt und dass die einzigen Typen, wo $p > 2$, jener involutorische, Σ_2 ist. Also:

XXXVI. Theorem. *Wenn eine Transformation eine Unendlichkeit von Doppelpunkten oder eine Unendlichkeit von Cyclen besitzt, welche eine irreductible Curve von $p > 1$ erfüllen, so ist sie periodisch bis auf einen einzigen Fall von Jonquières'schen Transformationen mit coincidenten $(n-1)$-fachen Punkten.*

XXXVII. Theorem. *Die einzigen birationalen Transformationen, welche* ∞^1 *Doppelpunkte in einer Curve von* $p > 1$ *enthalten, sind* Θ_2 *und* Σ_2, *der Typus* N_3 *und eine Classe von Jonquières'schen Transformationen. In diesem letzteren Falle ist die Curve hyperelliptisch. Für* Σ_2 *hat die Curve* $p = 4$ *und eine Particularisirung.*[1]

XXXVIII. Theorem. *Es gibt keine birationale Transformation mit* ∞^1 *Doppelpunkten oder* ∞^1 *Cyclen selben Indexes* i, *welche eine nicht hyperelliptische Curve von* $p > 4$ *erfüllen.*[2]

XXXIX. Theorem. *Es gibt keine birationale Transformation, welche eine nicht hyperelliptische Curve von* $p > 4$ *in sich transformirt, ohne selbst periodisch zu sein.*

XL. Theorem. *Keine birationale Transformation kann eine aperiodische eindeutige Correspondenz in einer Curve* $p > 1$ *hervorbringen.*[3]

Die vorhergehenden Sätze beziehen sich auf die invarianten Curven. Ich habe in meiner Preisschrift bewiesen und einige Constructionen des § 4 werden es ergänzen, dass jede periodische birationale Transformation wenigstens eine irreductible Curve $p > 2$ reproducirt. So gelangt man zum folgenden

---

[1] Ein Theil dieser Frage, der sich auf die Doppelpunkte allein bezieht, ist der Gegenstand einer Note von G. Castelnuovo (Acc. Lincei, Roma 7. Februar 1892), gegen welche ich 1892 einen offenen Brief gerichtet habe. Indem ich das Wesen dieses Briefes hier bei Seite lasse, bemerke ich nur, dass Castelnuovo die Unrichtigkeit seines Theoremes unter Benutzung meiner Preisschrift hätte bemerken können und will von den 3 mir zu Gebote stehenden directen Beweisen für die Unmöglichkeit eines periodischen Typus Indexes 4 mit Doppelpunktscurve $p > 2$ die folgenden geben. Eine Transformation T der behaupteten Art vorausgesetzt, würde man für T^2 eine Involution haben, deren Doppelpunktscurve sich in zwei Theile spalten müsste, deren einer Ort der Doppelpunkte für T, der andere Ort der involutorischen Paare für T sein würde. Eine solche Involution ist stets im Grade reducirbar, sodass nicht $p > 2$ sein könnte. Übrigens da ∞^1 invariante C_h vorhanden sein sollen, jede mit $u' - iu \equiv \gamma$, so müsste die Doppelpunktscurve diese C_h in je zwei Punkten schneiden, also sicherlich hyperelliptisch sein.

[2] Oder: ausgenommen $i = 1, 2, 3$ ist der Index in der Curve immer derselbe wie der Index der birationalen Transformation.

[3] Dieses Theorem folgt aus dem vorigen unter Hinzunahme einer Discussion der Curven, welche für aperiodische Collineationen invariant sein können. Das Theorem ist ein Theil des Theoremes von Schwarz (Crelle's Journal, Vol. 87), das in der Functionentheorie eine so besondere Stelle einnimmt.

XLI. Theorem. *Jede existirende periodische birationale Transformation kann birational in eine Transformation der folgenden drei Typen übertragen werden:*

1° *eine periodische Collineation,*

2° *eine Transformation von Jonquières mit coincidenten* $(n-1)$*-fachen Punkten* (ab),

3° *eine Transformation mit weniger als* 9 *Punkten (cf. Theorem XXI) welche also eine* $C_6 8a^2$ *reproducirt.*

XLII. Theorem. *Die geometrischen Relationen unter den Punkten, welche als Cyclen des Indexes* i *in einer periodischen birationalen Transformation der Ebene auftreten können, sind im Wesen dieselben als die, welche bestehen unter den* i *Punkten eines collinearen Cyclus oder eines Cyclus in einer Jonquières'schen Transformation mit* (ab), *ausgenommen gewisse Ketten von* 5, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 18, 20, 24, 30 *Punkten.*

Mit Hilfe der Netze birationaler Transformationen gelangt man zum Resultate, dass jede birationale Transformation als Bestandtheil eines Büschels betrachtet werden kann; deren Cyclen erfüllen eine Curve, für welche $p > 1$ erhalten werden kann, also:

XLIII. Theorem. *Die Cyclen in den Correspondenzen auf einer Curve* $p > 1$ *sind nicht wesentlich verschieden von den Cyclen, welche in den aperiodischen Transformationen in discreter Anzahl vorhanden sind.*

XLIV. Theorem. *Jede birationale Transformation, welche ein lineares* ∞^i *System von Curven mit* $p > 1$ *reproducirt,* $i \geqq 1$, *ist periodisch, ausgenommen die Collineationen.*

XLV. Theorem. *Eine periodische Jonquières'sche Transformation* (ab) *besitzt niemals ein invariantes* ∞^i *System von Curven* $p = 1$, $i > 1$.

XLVI. Theorem. *Wenn eine nicht hyperelliptische Curve von* $p > 4$ *eine eindeutige Correspondenz gestattet und sie in eindeutige Relation mit einer der Curven des Theoremes XXXI gesetzt werden kann, so enthält sie eine Reihe eines der folgenden Typen:*

$$G^1_{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2} \pm 4(p-1)^2}}, \quad G^2_{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + (p-1)^2}}, \quad G^3_{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{4}{9}(p-1)^2}}$$

welche für die Correspondenz invariant ist.

Diese drei Zahlen sind geliefert durch die Berechnung der Dimensionen eines Systemes von C_{3s} mit 6 , 7 , 8 s-fachen Punkten.

Um die Theorie der existirenden periodischen Transformationen zu vollenden, bleibt übrig, die periodischen Jonquières'schen Transformationen zu entdecken und jene mit invarianten linearen Systemen von C_3, ohne sich der Fundamentalpunkte und ihrer Eigenschaften zu bedienen. Dies soll der Gegenstand des 2. Theiles dieser Arbeit sein.

§ 3. *Construction invarianter Curven für eine periodische birationale Transformation.*

1. Für die existirenden Transformationen kann man invariante Curven auf dieselbe Art wie l. c. für die Characteristiken herleiten. Jede Gerade bestimmt mit allen ihren Transformirten eine zerlegte invariante Curve. Alle diese Curven bestimmen ein invariantes lineares System.

2. Nimmt man für ein invariantes System die Jacobi'schen Curven aller Netze desselben, so setzen diese Netze wieder ein anallagmatisches lineares System zusammen.

3. Man construirt eine involutorische Transformation, welche permutabel ist mit der gegebenen Transformation und man sucht für diese ein anallagmatisches lineares System z. B. jenes, welches Bertini erhält durch Verminderung einer Vielfachheit einer Fundamentalcurve um eine Einheit. Dieses System wird auch für die gegebene Transformation invariant sein. Die Construction ist aber nicht immer möglich, z. B. nicht für B_9.

4. Für zwei zusammengehörige Fundamentalsysteme ist der Ort U der Punkte, in welchen eine Gerade der Ebene Σ eine Berührung 3. O. mit irgend einer Curve des homaloïdalen Systemes von Σ hat, durch die Transformation in dieselbe Curve U', gebildet für das Feld Σ', übergeführt. Wenn die beiden Fundamentalsysteme wesentlich übereinstimmen, so haben die zwei Curven U, U' dieselben Singularitätencomplexe. Lässt man überdies die Gruppen gleicher Vielfachheit (Constructibilität vorausgesetzt) coïncidiren, so ist U eine invariante Curve.

5. Die absoluten Invarianten einer Curve für lineare Transformation sind auch absolute Invarianten für birationale Transformation, wenn diese die Curve in eine andere mit gleichen Singularitäten verwandelt. Also ist die Einhüllende der Curven mit constanter absoluter Invariante in einem invarianten linearen Systeme invariant.

6. Wenn man die Geraden sucht, welche eine beliebige der Curven des homaloïdalen Netzes in einer Gruppe von n Punkten schneiden, unter welchen 6 existiren, welche auf der Geraden und auf der Curve zwei projective Gruppen bilden, so ist der Ort dieser Sextupel invariant, falls das homaloïdale Netz für beide Felder im Wesen übereinstimmt. Speciell der Ort der Tangentialpunkte der Undulationspunkte ist eine invariante Curve. Statt Projectivität kann man auch eine symmetrische Relation unter den absoluten Invarianten der zwei Gruppen verlangen.[1]

7. Eine covariante Curve $L_{s_1 \ldots s_\mu}$ von μ Curvensystemen $s_1 \ldots s_\mu$ in Σ ist durch T in die covariante Curve $L'_{s'_1 \ldots s'_\mu}$ der μ transformirten Systeme übergeführt. Haben aber $s_1 \ldots s_\mu$ und $s'_1 \ldots s'_\mu$ dieselben Singularitätencomplexe, so gilt dasselbe für L, L'. Für Coincidenz von Σ, Σ' sind demnach μ unter einander transformirte Singularitätencomplexe zu finden (u. zw., wenn transitiv, von gleichen Dimensionen).[2] Es scheint, dass für eine willkürliche Transformation solche Systeme nicht existiren; für eine periodische liefert jede Curve der Ebene eine solche Gruppe. Indem man aus μ solchen Systemen durch eine für alle Systeme symmetrische Eigenschaft eine covariante Curve herleitet, wird man eine invariante Curve erhalten. Ein specieller Fall ist dann der, wo alle μ Systeme selbst einzeln invariant sind.

7. **XLVII. Theorem.** *Für jede Transformation des Indexes 3 ist der Ort der Punkte, welche mit ihren zwei Transformirten alineirt sind, eine invariante Mannigfaltigkeit.*

---

[1] Für zwei nicht symmetrische Fundamentalsysteme erhält man auf diese Art sicherlich Systeme derselben Ordnung, welche einander entsprechen.

[2] Da die Singularitäten von L ganze Functionen der Singularitäten von $s_1 \ldots s_\mu$ sind, befindet man sich dem Umstande gegenüber, dass die genannten arithmetischen Functionen durch eine lineare Substitution in sich selbst übertragen sind.

Für jede Transformation T des Indexes 4 ist der Ort der Punkte, welche mit den drei Transformirten in einem Kegelschnitte durch ein involutorisches Paar oder durch zwei Doppelpunkte von T sind, invariant.

XLVIII. Theorem. *Der Ort der Punkte in einer periodischen Transformation des Indexes i (im R_r), welche mit den $i-1$ Transformirten einer algebraischen (oder transcendenten) Bedingung genügen, welche für die i Punkte sowie alle sonst eintretenden Punkte symmetrisch ist, ist invariant.*

Z. B. der Ort der Punkte, die mit ihren Transformirten ein i-Eck von gegebenem Volumen bilden.

8. Für die Transformationen mit 8 Punkten in der Charakteristik erhält man invariante Curven durch die ∞^1 Büschel $C_{3s} 9a^s$, von welchen 8 Scheitel die 8 gegebenen Punkte sind. Die 9. Punkte erfüllen eine Curve, welche auf jeder C_3 des Büschels Punkte mit den Parametern $\Sigma a + \frac{C}{s}$ hat, von welchen einige auszuschliessen sind. Für die rationalen Curven fällt eine Anzahl dieser Punkte mit dem Doppelpunkte zusammen. Die Ortscurve zerlegt sich in Bestandtheile gemäss den s^{ten} primitiven Einheitswurzeln.

9. **XLIX. Theorem.** *Für eine Transformation der Ebene (oder des R_r) besteht unter den Punkten p und den Geraden $p^{(h)}p^{(k)}$ (oder den R_i durch $p^{\lambda_1} \dots p^{\lambda_{i+1}}$) eine einfach rationale Transformation.*

L. Theorem. *Für die periodischen Transformationen, welche eine interne I_8 besitzen, ist die Transformation unter p und der Geraden $p^\nu p^{\nu+\frac{i}{2}}$* 1-2-*deutig.*

Beweis. Durch einen Punkt p der Ebene sind der Cyclus und die Gerade $p^\nu p^{\nu+\frac{i}{2}}$ bestimmt; die Gerade aber bestimmt, da I_8 von der 1. Classe ist, ein einziges Paar, also zwei Punkte p, je nachdem man den einen oder anderen Punkt des Paares als p^ν nimmt. Ebenso beweist man:

LI. Theorem. *Für die periodischen Transformationen der Ebene, welche eine interne Involution I_8 haben, ist die Transformation unter den zwei Ge-*

raden $p^\nu p^{\nu+\frac{i}{2}}$ *und* $p^\mu p^{\mu+\frac{i}{2}}$, *wo* μ *und* ν *zwei ganze Zahlen* $< i$ *sind, birational und periodisch vom Index* $\frac{\theta}{\mu-\nu}$, *wo* θ *das kleinste Vielfache von* i *und* $\mu-\nu$.

Ferner: Für die periodischen Transformationen, welche eine interne Involution I_{17} haben, ist die Transformation unter den Geraden $p^\nu p^{\nu+\frac{i}{2}}$ und $p^\mu p^{\mu+\frac{i}{2}}$ 4-4-deutig, *aber periodisch.*

Die so entstehenden mehrdeutigen periodischen Transformationen verdienen Beachtung. Man erhält andere, indem man die Geraden (pp^λ) und $(p^\mu p^\nu)$ eines selben Cyclus in Verwandtschaft setzt. Hier können sie dazu dienen, um invariante Curven zu bestimmen, da die in den Tangenten einer invarianten Enveloppe enthaltenen Punktepaare eine invariante Curve liefern.

§ 4. *Die parametrische Darstellung der Curven und die periodischen Transformationen.*

I.

1. Damit eine Charakteristik in einer C_3^3 enthalten sei, bestehen folgende Bedingungen. Die Projectivität in C_3^3 mit der Spitze als Doppelpunkt ist $Bu' + Cu + D = 0$ oder $u' = -(C:D)u - (D:B)$. Drei alineirte Punkte u_1, u_2, u_3 sind übergeführt in $-\frac{C}{B}u_i - \frac{D}{B}$, welche zu den Parametern b eines der Fundamentalsysteme addirt geben

$$-3\frac{D}{B} + \beta_1 b_1 + \ldots + \beta_\sigma b_\sigma = 0,$$

wo β_i die Vielfachheiten der Punkte b. Für einen Fundamentalpunkt erhält man durch Einführung des entsprechenden Punktes in die Fundamentalcurve

$$-\frac{D}{B} + \left(\beta_{11} - \frac{C}{B}\right)b_1 + \beta_{12}b_2 + \ldots + \beta_{1\sigma}b_\sigma = 0,$$

oder unter Voraussetzung der Coïncidenz $(a_{i_1} b_1)$

$$-\frac{D}{B} + \left(\beta_{11} - \frac{C}{B}\right) b_1 + \beta_{12} b_2 + \ldots + \beta_{1\sigma} b_\sigma = 0,$$

was $\sigma + 1$ Gleichungen gibt, deren Determinante

$$D = \begin{vmatrix} -3 & \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_\sigma \\ -1 & \beta_{11} - \frac{C}{B} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1\sigma} \\ . & . & . & \ldots & . \\ -1 & \beta_{\sigma 1} & \beta_{\sigma 2} & \ldots & \beta_{\sigma\sigma} - \frac{C}{B} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -3n & \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_\sigma \\ -3\beta_{i_1} + \frac{C}{B} & \beta_{11} - \frac{C}{B} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1\sigma} \\ . & . & . & \ldots & . \\ -3\beta_{i_\sigma} + \frac{C}{B} & \beta_{\sigma 1} & \beta_{\sigma 2} & \ldots & \beta_{\sigma\sigma} - \frac{C}{B} \end{vmatrix},$$

$$D = -3 \begin{vmatrix} n + \frac{C}{B} & \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_\sigma \\ \beta_{i_1} & \beta_{11} - \frac{C}{B} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{\sigma 1} \\ . & . & . & \ldots & . \\ \beta_{i_\sigma} & \beta_{\sigma 1} & \beta_{\sigma 2} & \ldots & \beta_{\sigma\sigma} - \frac{C}{B} \end{vmatrix}$$

$$+ \frac{C}{B} \begin{vmatrix} 3 & \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_\sigma \\ 1 & \beta_{11} - \frac{C}{B} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1\sigma} \\ . & . & . & \ldots & . \\ 1 & \beta_{\sigma 1} & \beta_{\sigma 2} & \ldots & \beta_{\sigma\sigma} - \frac{C}{B} \end{vmatrix}$$

endlich, weil die zweite Determinante $-D$ ist, und mit $x' = -x = -\frac{C}{B}$,

$$D = -\frac{3\Delta_x}{x+1} = \frac{3\Delta_{x'}}{x'-1}.$$

LII. Theorem. *Die Determinante, welche über die Existenz einer Charakteristik auf C_3^3 entscheidet, ist bis auf einen Factor $x-1$ proportional der Determinante für die fundamentale Substitution der Characteristik.*

Da der Werth von $-\frac{C}{B}$ das Doppelverhältniss der Projectivität auf C_3^3 ist, so erhält man:

LIII. Theorem. *Wenn eine Characteristik in einer C_3^3 construirt werden kann, so ist der Periodicitätsindex in C_3^3 derselbe wie der Index der ebenen Transformation.*

2. Derselbe Calcül gibt für C_3 $p=1$ unter Ersetzung aller Gleichungen durch Congruenzen modulo der 2 Perioden von C_3 für die Determinante dieser Congruenzen

$$D \equiv \frac{3\Delta_{-k}}{1-k} \pmod{K, iK'},$$

wo die Correspondenz in C_3 ist $u' + ku \equiv \gamma$ und gesetzt ist

$$\Delta_{-k} = \begin{vmatrix} n-k & \beta_1 & \dots & \beta_\sigma \\ \beta_{i_1} & \beta_{11}+k & \dots & \beta_{1\sigma} \\ . & . & \dots & . \\ \beta_{i_\sigma} & \beta_{\sigma 1} & \dots & \beta_{\sigma\sigma}+k \end{vmatrix}.$$

Die Vergleichung mit den Resultaten l. c. lehrt, dass diese Determinante für die periodischen Typen und für $k = \sqrt{-1}$ oder $\pm\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-3})$ stets einen ganzzahligen Werth hat. Wenn die Determinante verschwindet, so sind die Congruenzen für jeden Werth von γ verträglich und mit dem Werthe von γ rechnet man die Werthe der Parameter der Punkte der Characteristik.

3. Die früheren Resultate sind dahin zusammenzufassen, dass jeder Typus eine C_3^3 reproducirt, ausgenommen nur Γ_6^1, H_6 und H_6^1.

LIV. Theorem. *Für jede construirbare periodische Transformation existirt eine Varietät mit einer eigentlichen anallagmatischen C_3.*

Beweis. Wenn der Typus eine C_3 reproducirt, kann man die Fundamentalpunkte der Transposition, welche auf die vorgelegte Characteristik führt, so wählen, dass alle Fundamentalpunkte in einer selben der invarianten C_3 sind. Also wird die äquivalente Transformation die transponirte C_3 reproduciren.

Regel. Um zu untersuchen, ob eine periodische Characteristik einem constructibeln Typus äquivalent sei oder nicht, hat man die Constructibilität in einer der Curven C_3^3, C_e, C_h, C_k mittelst der obigen Congruenzen zu untersuchen. [1]

II.

Die vorstehende Rechnung ist ein besonderer Fall einer anderen, welche sich auf invariante Curven des Geschlechtes p bezieht.

Die Correspondenz auf C_n verwandelt die p Integrale I. Gattung unter einander mittelst der Formeln

$$\begin{aligned} I'_1 &= \eta_{11} I_1 + \eta_{12} I_2 + \dots + \eta_{1p} I_p, \\ I'_2 &= \eta_{21} I_1 + \eta_{22} I_2 + \dots + \eta_{2p} I_p, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \dots \quad \cdot \\ I'_p &= \eta_{p1} I_1 + \eta_{p2} I_2 + \dots + \eta_{pp} I_p \end{aligned}$$

und eine Summe $\lambda_1 I_i^{(1)} + \dots + \lambda_\sigma I_i^{(\sigma)}$ verwandelt sich in

$$\alpha_{i1} \sum_\sigma \lambda_\nu I_1^{(\nu)} + \alpha_{i2} \sum_\sigma \lambda_\nu I_2^{(\nu)} + \dots .$$

Es sei nach dem Abel'schen Theoreme die Summe der Integrale über n alineirte Punkte

$$I_i^{(1)} + \dots + I_i^{(n)} \equiv K_i. \qquad (i=1\dots p)$$

---

[1] Ich bezeichne mit C_e, C_h, C_k eine äquianharmonische, harmonische oder willkürliche C_3.

Die Entdeckung der birationalen Transformationen, welche diese Correspondenz enthalten, theilt sich in zwei Theile:

1°. Sei

$$(1) \qquad \begin{matrix} m & a_1 & \ldots & a_\sigma, \\ -a_1 & a_{11} & \ldots & a_{1\sigma}, \\ . & . & \ldots & . \\ -a_\sigma & a_{\sigma 1} & \ldots & a_{\sigma\sigma} \end{matrix}$$

die Matrix der birationalen Transformation, welche den gegebenen Singularitätencomplex der Curve reproducirt. Wenn die Berechnung dieser Matrix ohne Erfolg ist, kann die Transformation nicht existiren.

2°. Seien

$$(2) \qquad A_1^{(i)}, A_2^{(i)}, \ldots, A_p^{(i)} \qquad {\scriptstyle (i=1,\ldots,\sigma)}$$

die Integralsummen in den σ Punkten der Characteristik. Ferner seien $I_i^{(1)} \ldots I_i^{(n)}$ $(i = 1 \ldots p)$ die Werthe der Integrale in n alineirten Punkten und K_i ihre Summe. Ferner seien $[I_i]^1, \ldots, [I_i]^n$ $(i = 1 \ldots p)$ die Integrale in den Schnittpunkten mit der transformirenden Curve. Die Congruenz

$$(3) \qquad [I_i]^1 + \ldots + [I_i]^n \equiv \alpha_{i1} K_1 + \ldots + \alpha_{ip} K_p$$

liefert

$$(4) \qquad \begin{matrix} a_1 A_1^{(1)} + \ldots + a_\sigma A_1^{(\sigma)} + \alpha_{11} K_1 + \ldots + \alpha_{1p} K_p \equiv m K_1, \\ . \quad \ldots \quad . \quad . \quad \ldots \quad . \quad . \\ a_1 A_p^{(1)} + \ldots + a_\sigma A_p^{(\sigma)} + \alpha_{p1} K_1 + \ldots + \alpha_{pp} K_p \equiv m K_p. \end{matrix}$$

Betrachten wir das Integral I_1. Für eine Gerade durch den Punkt b_1 gilt die Congruenz

$$I_1^{(1)} + I_1^{(2)} + \ldots + I_1^{(n-b_1)} + B_1^1 \equiv K_1,$$

wo $B_1^{(1)}$ die Integralsumme der sämmtlichen Nachbarpunkte von b_1 ist.

Seien $H_1^{(1)}, H_1^{(2)}, \ldots$ die Integrale der Punkte des ersten Feldes, welche durch die Correspondenz in die Punkte $1, 2, \ldots n - b_1$ übertragen sind. Dann wird gelten

$$H_1^{(1)} + \ldots + H_1^{(n-b_1)} + (a_1 - a_{11}) A_1^{(1)} + (a_2 - a_{12}) A_1^{(2)} + \ldots \equiv b_1 K_1$$

und weil

$$H_1^{(\lambda)} \equiv \alpha'_{11} I_1^{(1)} + \ldots + \alpha'_{1p} I_p^{(1)},$$

wo α'_{ik} der Minor von α_{ik} in der Determinante der α_{ik}, so wird

$$H_1^{(1)} + \ldots + H_1^{(n-b_1)} \equiv \alpha'_{11}(K_1 - B_1^{(1)}) + \ldots + \alpha'_{1p}(K_p - B_p^{(1)})$$

und

$$\alpha'_{11}(K_1 - B_1^{(1)}) + \ldots + \alpha'_{1p}(K_p - B_p^{(1)}) + (a_1 - a_{11}) A_1^{(1)} + \ldots \equiv (m - b_1) K_1$$

und durch Substitution von (4)

$$b_1 K_1 - \sum_1^p \alpha'_{1i} B_i^{(1)} - a_{11} A_1^{(1)} - \ldots - a_{1\sigma} A_1^{(\sigma)} \equiv 0.$$

Wegen der Coincidenzen der Characteristik wird man haben

$$B_i^{(1)} = A_i^{(\lambda_1)}, \qquad b_1 = a_{\lambda_1}.$$

Die p Congruenzen werden

(5) $$a_{\lambda_1} K_\rho - \sum_1^p {}_i\, \alpha'_{1i} A_i^{(\lambda_1)} - a_{11} A_\rho^{(1)} - \ldots - a_{1\sigma} A_\rho^{(\sigma)} \equiv 0 \qquad (\rho = 1, \ldots, p)$$

oder

(6) $$a_{\lambda_i} K_\rho - \mathfrak{A}_\rho^\lambda - a_{i1} A_\rho^{(1)} - \ldots - a_{i\sigma} A_\rho^{(\sigma)} \equiv 0. \qquad \binom{\rho = 1, \ldots, p}{i = 1, \ldots, \sigma}$$

Die Zahlen a sind bekannt als Resultat des arithmetischen Problemes und man hat so $p\sigma$ Congruenzen unter den $p\sigma$ Grössen A, welche man auflösen muss.

Die Congruenzen (6) werden zur Bestimmung der Coefficienten der Curve dienen können. Dies ist die Form des Problemes, wenn man die anallagmatischen Curven in einer gegebenen periodischen Transformation sucht, z. B. die Curven C_{3s} mit 6, 7, 8 s-fachen Punkten.

In allen Fällen, wo es möglich ist, die α_{ik} auf die canonische Matrix $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{kk}$ zurückzuführen, vereinfacht sich die Rechnung. Ein solcher Fall ist jener der periodischen Transformation, in Consequenz der Theoreme der Herren Weber und Frobenius. (Annali di Mat. ser. 2. Bd. 9, Crelles Journal, Bd. 95, p. 264.)

$$[1] \qquad (m - \alpha_{11}) K_1 - a_1 A_1^{(1)} - \ldots - a_\sigma A_1^{(\sigma)} \equiv 0,$$

$$[2] \qquad (m - \alpha_{22}) K_2 - a_1 A_2^{(1)} - \ldots - a_\sigma A_2^{(\sigma)} \equiv 0,$$

$$\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdots \qquad \cdot$$

$$[p] \qquad (m - \alpha_{pp}) K_p - a_1 A_p^{(1)} - \ldots - a_\sigma A_p^{(\sigma)} \equiv 0,$$

$$[1\,,\,i] \qquad a_{\lambda_i} K_1 - a_{11} A_1^{(1)} - \ldots - (a_{1\lambda_i} + \alpha_{11}) A_1^{(\lambda_i)} - \ldots \equiv 0,$$

$$\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdots \qquad \cdot \qquad (i = 1 \ldots \sigma)$$

$$[p\,,\,i] \qquad a_{\lambda_i} K_p - a_{11} A_p^{(1)} - \ldots - (a_{1\lambda_i} + \alpha_{pp}) A_p^{(\lambda_i)} - \ldots \equiv 0.$$

Die Congruenzen [1], [1 , 1], ..., [1 , σ] dienen dazu, die $A_1^{(\lambda)}$ und K_1 zu bestimmen. Der Nenner dieser Grössen ist $\Delta_{\alpha_{11}}$, der Werth von Δ_x für $x = \alpha_{11}$. Damit die A nur eine endliche Anzahl von Werthen haben, muss $\Delta_{\alpha_{ii}}$ eine commensurable Zahl sein. Also liefert die Determinante Δ_{xx} gleich Null gesetzt eine Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten, welche durch die Wurzeln der bekannten Gleichung von Herrn Weber befriedigt wird.

Die einzigen Ausnahmen der vorhergehenden Rechnungen sind die zwei besonderen Curven $C_{3s}\ 7a^s$ und $C_{3s}\ 8a^s$.

III.

Es bleibt übrig, für eine der typischen Transformationen die Gleichungen der invarianten Curven zu suchen.

1. Für die Typen mit 6 Punkten hat man 4 invariante $C_3 : \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ und kennt (cit. Abh.) die Indices in der Collineation unter den ∞^3 C_3, welche sein wird

$$\varphi_1' : \varphi_2' : \varphi_3' : \varphi_4' = \varepsilon_1 \varphi_1 : \varepsilon_2 \varphi_2 : \varepsilon_3 \varphi_3 : \varepsilon_4 \varphi_4.$$

Man bildet eine ganze Function $F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$, welche durch die Multiplication der φ mit den ε nicht geändert wird und, indem man die φ durch die Ausdrücke in den x ersetzt, erhält man eine Function, welche invariant ist für die gegebene birationale Transformation.

2. Ebenso für die Typen mit 7 Punkten:

LV. Theorem. *Alle algebraischen Functionen, welche durch einen Typus mit 7 Punkten ungeändert bleiben, sind als ganze Functionen dreier invarianter C_3 und ihrer Jacobischen Curve H darstellbar.*

Die Coefficienten der Collineation unter den φ_i^2, $\varphi_i\varphi_k$ und H ergeben sich aus den Resultaten der citirten Abhandlung.

3. Für die Typen mit 8 Punkten hat man eine leicht zu schreibende Curve 6. Ordnung ϕ und die Curve D_9, Jacobiana der $C_6(8a^2)$, welche invariant sind.

LVI. Theorem. *Als Function von ϕ, D_9 und zweier invarianter C_3 sind alle invarianten algebraischen Functionen ausdrückbar.*

4. Für die periodische Transformation des Typus von Jonquières drückt man jede invariante Function durch x_1, x_2 und C_M aus, wo C_M die Curve der Hemicyclen ist, und die Collineation ist

$$x_1' : x_2' : C_M' = x_1 : \varepsilon_{h+1} x_2 : - \varepsilon_{h+1} C_M.$$

Mittelst Quotienten solcher Functionen F wird man in allen Fällen Functionen haben, welche absolut invariant sind.

II. THEIL.

Methoden für die Auffindung der existirenden periodischen Transformationen.

Nachdem in § 2. I. Theiles 6 Classen gefunden wurden, unter welchen die Typen der algebraisch existirenden, periodischen Transformationen zu suchen sind, nämlich jene von Jonquières, dann jene mit 4, 5, 6, 7, 8 Punkten, schliessen wir von Anfang an jene mit 4 und 5 Punkten aus, welche nothwendig quadratisch oder cubisch sind. Man verschafft sich nämlich sehr leicht die Bedingungen für die Lage der Fundamentalpunkte und erkennt überdies, dass alle diese Typen in Wahrheit Colli-

neationen oder quadratischen oder cubischen Transformation mit (ab) äquivalent sind.

Die grösste Schwierigkeit in der Entdeckung der existirenden Typen trifft man bei den Typen mit 6, 7, 8 Punkten. Ich gebe also directe Methoden, um diese Typen zu finden und a posteriori die Identität mit den auf ganz verschiedene Weise in der Preisschrift construirten Typen herzustellen.

§ 1. *Die Typen mit 6 Punkten.*

1. Das ∞^3 System von C_3 durch 6 Punkte ist bereits oft für die Untersuchung der Flächen 3. O. angewendet. Ich habe zuerst eine Methode gegeben,[1] um umgekehrt die cubischen Flächen zur Auffindung von Eigenschaften der 6 Punkte in der Ebene zu verwenden.

2. Eine birationale Transformation, welche ihre Charakteristik in den 6 gegebenen Punkten hat, verwandelt die ∞^3 C_3 unter einander und man kann sich eine Transformation des R_3 denken, welche dieselbe Vertauschung auf der F_3 hervorbringt wie jene, welche als ebenes Bild die birationale Transformation der Ebene hat und man sieht sofort, dass als diese Transformation der R_3 eine Collineation genommen werden kann. Statt nun wie soeben aus der Ebene heraus auf die Collineationen im R_3 zu schliessen, stelle ich zuerst die Collineation auf und mache dann die Abbildung der durch die Collineation in F_3 hervorgebrachten Umwandlung auf die Ebene.[2]

3. Zur Entdeckung der Collineationen bediene ich mich derselben Methode, welche ich im § 3. I. l. c. angewendet habe, um vollständig die Collineationen zu finden, welche eine ebene cubische Curve reproduciren können.

Sei

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \tag{1}$$

[1] Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris, 5 janvier 1885.

[2] Der Erste, der die Untersuchung der projectiven Systeme auf Flächen u. zw. auf Flächen 2. Ordnung, auf synthetischem Wege unternommen hat, ist Herr ZEUTHEN, Mathem. Ann., Bd. 26, p. 247. Es ist keine Frage, dass man auch zur Auffindung der collinearen Systeme auf Flächen 3. O. synthetisch gelangen kann.

die Gleichung einer F_3 und sei

(2) $$x'_i = \lambda_i x_i$$

eine auf ihre canonische Form zurückgeführte Collineation, welche Form hier stets vorausgesetzt werden kann, da es sich um periodische Collineationen handelt.[1] Denn die Umwandlung auf F_3 muss ebenfalls periodisch sein und da F_3 als irreductibel vorausgesetzt ist, muss die Collineation nothwendig auch periodisch sein. Ich untersuche also die periodischen Collineationen, indem ich λ_i gleich Einheitswurzeln setze, die Substitution von (2) in (1) mache, wo ein Glied $x_1^{m_1}x_2^{m_2}x_3^{m_3}x_4^{m_4}$ durch die Collineation den Factor $\lambda_1^{m_1}\lambda_2^{m_2}\lambda_3^{m_3}\lambda_4^{m_4}$ annehmen wird, sodass (1) nur dann invariant sein wird, wenn die Grössen

(3) $$\lambda_1^{m_1}\lambda_2^{m_2}\lambda_3^{m_3}\lambda_4^{m_4}$$

denselben Werth für alle Glieder haben.

Um hierüber zu entscheiden, theile ich die linke Seite von (1) nach der Transformation in mehrere Aggregate gemäss den Factoren (3). Die folgende Übersicht ist das Resultat dieser Arbeit. Da alles von den Exponenten abhängt und nichts von den Coefficienten, so werde ich diese unterdrücken. Auch schreibe ich (2) einfacher $\lambda_1 x_1 : \lambda_2 x_2 : \lambda_3 x_3 : \lambda_4 x_4$.

1. $x_1 : x_2 : x_3 : -x_4$,

$$X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + X_1^2X_2 + X_1^2X_3 + X_2^2X_1 + X_2^2X_3 + X_3^2X_1 + X_3^2X_2 + X_4^2X_1 + X_4^2X_2 + X_4^2X_3 + X_1X_2X_3 \,\|\, x_4^3 + x_1^2x_4 + x_2^2x_4 + x_3^2x_4 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 \,\|.$$

2. $x_1 : x_2 : -x_3 : -x_4$,

$$X_1^3 + X_2^3 + X_1^2X_2 + X_2^2X_1 + X_3^2X_1 + X_3^2X_2 + X_4^2X_1 + X_4^2X_2 + X_1X_3X_4 + X_2X_3X_4 \,\|\, X_3^3 + X_4^3 + X_1^2X_3 + X_2^2X_3 + X_1^2X_4 + X_2^2X_4 + X_3^2X_4 + X_4^2X_3 + X_1X_2X_3 + X_1X_2X_4 \,\|.$$

[1] Was die Reduction einer Collineation auf die canonische Form betrifft, hat man in neuerer Zeit Arbeiten von NETTO, KRONECKER, LIPSCHITZ, PRYM und neuerdings von ROST, welche sie ausser allen Zweifel setzen.

3. $x_1 : x_2 : x_3 : \varepsilon x_4, \qquad \varepsilon^3 = 1,$

$$X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + X_1^2X_2 + X_2^2X_1 + X_3^2X_1 + X_3^2X_2 + X_1^2X_3 + X_2^2X_3 + X_1X_2X_3$$
$$+ X_4^3 \,|\, x_4^2x_1 + x_4^2x_2 + x_4^2x_3 \,\|\, x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 + x_1^2x_4 + x_2^2x_4 + x_3^2x_4 \,\|.$$

4. $x_1 : x_2 : \varepsilon x_3 : \varepsilon x_4, \qquad \varepsilon^3 = 1,$

$$X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + X_4^3 + X_1^2X_2 + X_2^2X_1 \,\|\, x_1^2x_3 + x_2^2x_3 + x_1^2x_4 + x_2^2x_4 + x_1x_2x_3$$
$$+ x_1x_2x_4 \,\|\, x_3^2x_1 + x_3^2x_2 + x_4^2x_1 + x_4^2x_2 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 \,\|.$$

5. $x_1 : x_2 : \varepsilon x_3 : \varepsilon^2 x_4, \qquad \varepsilon^3 = 1,$

$$X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + X_4^3 + X_1^2X_2 + X_2^2X_1 + X_1X_3X_4 + X_2X_3X_4 \,\|\, X_1^2X_3 + X_2^2X_3$$
$$+ X_1X_2X_3 + X_4^2X_1 + X_4^2X_2 + X_3^2X_4 \,\|\, X_3^2X_1 + X_3^2X_2 + X_1X_2X_4 + X_4^2X_3$$
$$+ X_1^2X_4 + X_2^2X_4 \,\|.$$

6. $x_1 : ix_2 : -x_3 : -x_4, \qquad i^2 = -1,$

$$X_1^3 + X_3^2X_1 + X_4^2X_1 + X_2^2X_3 + X_2^2X_4 + X_1X_3X_4 \,\|\, X_1^2X_3 + X_1^2X_4 + X_2^2X_1$$
$$+ X_3^2X_4 + X_4^2X_3 + X_3^3 + X_4^3 \,\|\, x_1^2x_2 + x_3^2x_2 + x_4^2x_2 + x_2x_3x_4 \,\|\, x_1x_2x_3$$
$$+ x_1x_2x_4 + x_2^3 \,\|.$$

7. $x_1 : -x_2 : ix_3 : ix_4, \qquad i^2 = -1$

$$X_1^3 + X_2^2X_1 + X_2X_3X_4 + X_3^2X_2 + X_4^2X_2 \,\|\, X_1^2X_2 + X_2^3 + X_1X_3X_4 + X_3^2X_1$$
$$+ X_4^2X_1 \,\|\, x_1^2x_3 + x_2^2x_3 + x_1^2x_4 + x_2^2x_4 \,\|\, x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_3^3 + x_4^3 + x_3^2x_4 + x_4^2x_3 \,\|.$$

8. $x_1 : -x_2 : ix_3 : -ix_4, \qquad i^2 = -1,$

$$X_1^3 + X_2^2X_1 + X_1X_3X_4 + X_3^2X_2 + X_4^2X_2 \,\|\, X_2^3 + X_1^2X_2 + X_3^2X_1 + X_4^2X_1$$
$$+ X_2X_3X_4 \,\|\, X_4^3 + X_1^2X_3 + X_2^2X_3 + X_3^2X_4 + X_1X_2X_4 \,\|\, X_3^3 + X_1^2X_4$$
$$+ X_2^2X_4 + X_4^2X_3 + X_1X_2X_3 \,\|.$$

9. $x_1 : x_2 : \varepsilon x_3 : \varepsilon^2 x_4, \qquad \varepsilon^5 = 1,$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_4^2x_3 + x_2^2x_1 + x_1^2x_2 \,\|\, x_3^3 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 \,\|\, x_4^3 + x_1^2x_3 + x_2^2x_3$$
$$+ x_1x_2x_3 \,\|\, x_1^2x_4 + x_2^2x_4 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2 + x_1x_2x_4 \,\|\, x_3^2x_4 + x_4^2x_1 + x_4^2x_2 \,|.$$

$$10.\quad x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3 : \varepsilon^3 x_4, \qquad \varepsilon^5 = 1,$$

$$x_1^3 + x_2^2 x_4 + x_3^2 x_2 + x_1 x_3 x_4 \,\|\, x_3^3 + x_1^2 x_2 + x_4^2 x_1 + x_2 x_3 x_4 \,\|\, x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_3^2 x_4$$

$$x_4^2 x_2 \,\|\, x_2^3 + x_1^2 x_4 + x_4^2 x_3 + x_1 x_2 x_3 \,\|\, x_4^3 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_1 x_2 x_4 \,\|.$$

$$11.\quad x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3 : \varepsilon^4 x_4, \qquad \varepsilon^5 = 1,$$

$$x_1^3 + x_4^2 x_3 + x_1 x_2 x_4 \,\|\, x_3^3 + x_1^2 x_2 + x_2^2 x_4 + x_3^2 x_1 + x_1 x_3 x_4 \,\|\, x_4^3 + x_1^2 x_2 + x_2^2 x_4$$

$$+ x_3^2 x_1 + x_1 x_3 x_4 \,\|\, x_4^3 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_3^2 x_2 + x_2 x_3 x_4 \,\|\, x_2^3 + x_3^2 x_4 + x_4^2 x_1$$

$$+ x_1 x_2 x_3 \,\|\, x_1^2 x_4 + x_2^2 x_3 + x_4^2 x_2 \,\|.$$

$$12.\quad x_1 : x_2 : - x_3 : \varepsilon x_4,$$

$$X_1^3 + X_2^3 + X_1^2 X_2 + X_2^2 X_1 + X_3^2 X_1 + X_3^2 X_2 + X_4^3 \,\|\, x_3^3 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3$$

$$+ x_1 x_2 x_3 \,\|\, x_1^2 x_4 + x_2^2 x_4 + x_3^2 x_4 + x_1 x_2 x_4 \,\|\, x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 \,\|\, x_4^2 x_1 + x_4^2 x_2 \,\|\, x_4^2 x_3 \,\|.$$

$$13.\quad x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3 : - x_4,$$

$$X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + X_4^2 X_1 + X_1 X_2 X_3 \,\|\, x_4^3 + x_1^2 x_4 + x_2 x_3 x_4 \,\|\, x_2^2 x_4$$

$$+ x_1 x_3 x_4 \,\|\, X_1^2 X_2 + X_2^2 X_3 + X_3^2 X_1 + X_4^2 X_2 \,\|\, X_1^2 X_4 + X_2^2 X_1 + X_3^2 X_2$$

$$+ X_4^2 X_3 \,\|\, x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 \,\|\, x_3^2 x_4 \,\|.$$

$$14.\quad x_1 : x_2 : - x_3 : - \varepsilon x_4, \qquad \varepsilon^3 = 1,$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 + x_3^2 x_1 + x_3^2 x_2 \,\|\, X_3^3 + X_4^3 + X_1 X_2 X_3 + X_1^2 X_3$$

$$+ X_2^2 X_3 \,\|\, x_4^2 x_1 + x_4^2 x_2 \,\|\, x_4^2 x_3 \,\|\, x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 \,\|\, x_1 x_2 x_4 + x_1^2 x_4 + x_2^2 x_4 + x_3^2 x_4 \,\|.$$

$$15.\quad x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon x_3 : - x_4, \qquad \varepsilon^3 = 1,$$

$$X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + X_4^2 X_1 + X_2^2 X_3 + X_3^2 X_2 \,\|\, x_4^3 + x_1^2 x_4 \,\|\, x_4^2 x_2 + x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3$$

$$+ x_4^2 x_3 \,\|\, x_2^2 x_1 + x_3^2 x_1 + x_1 x_2 x_3 \,\|\, x_2^2 x_4 + x_3^2 x_4 + x_2 x_3 x_4 \,\|\, x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 \,\|.$$

$$16.\quad x_1 : \varepsilon x_2 : - \varepsilon x_3 : - \varepsilon^2 x_4, \qquad \varepsilon^3 = 1,$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^2 x_2 + x_1 x_3 x_4 \,\|\, x_3^3 + x_4^3 + x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_4 \,\|\, x_1^2 x_2 + x_4^2 x_1$$

$$+ x_2 x_3 x_4 \,\|\, x_1^2 x_3 + x_2^2 x_4 + x_3^2 x_4 \,\|\, x_1^2 x_4 + x_4^2 x_3 + x_1 x_2 x_3 \,\|\, x_2^2 x_1 + x_3^2 x_1 + x_4^2 x_2 \,\|.$$

$$17.\quad x_1 : x_2 : -\varepsilon x_3 : -\varepsilon x_4, \qquad \varepsilon^7 = 1,$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_1^2x_2 + x_2^2x_1 \,\|\, x_3^3 + x_4^3 + x_4^2x_3 + x_3^2x_4 \,\|\, x_3^2x_1 + x_3^2x_2 + x_4^2x_1 + x_4^2x_2$$
$$+ x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 \,\|\, x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1^2x_3 + x_1^2x_4 + x_2^2x_3 + x_2^2x_4 \,\|.$$

$$18.\quad x_1 : x_2 : \varepsilon x_3 : \varepsilon^6 x_4, \qquad \varepsilon^7 = 1,$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_2^2x_1 + x_1^2x_2 + x_2x_3x_4 + x_1x_3x_4 \,\|\, x_3^3 \,\|\, x_4^3 \,\|\, x_1^2x_3 + x_2^2x_3 + x_3^2x_4$$
$$+ x_1x_2x_3 \,\|\, x_1^2x_4 + x_2^2x_4 + x_4^2x_3 + x_1x_2x_4 \,\|\, x_3^2x_1 + x_3^2x_2 \quad x_4^2x_1 + x_4^2x_2 \,\|.$$

$$19.\quad x_1 : x_2 : \varepsilon x_3 : \varepsilon^3 x_4, \qquad \varepsilon^7 = 1,$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_1^2x_2 + x_2^2x_1 + x_4^2x_3 \,\|\, x_3^3 + x_1^2x_4 + x_2^2x_4 + x_1x_2x_4 \,\|\, x_4^3 + x_3^2x_1$$
$$+ x_3^2x_2 \,\|\, x_1^2x_3 + x_2^2x_3 + x_1x_2x_3 \,\|\, x_3^2x_4 \,\|\, x_4^2x_1 + x_4^2x_2 \,\|\, x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 \,\|.$$

$$20.\quad x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3 : \varepsilon^3 x_4, \qquad \varepsilon^7 = 1,$$

$$x_1^3 + x_3^2x_4 + x_4^2x_2 \,\|\, x_2^3 + x_1^2x_4 + x_1x_2x_3 \,\|\, x_3^3 + x_4^2x_1 + x_2x_3x_4 \,\|\, x_4^3 + x_2^2x_1$$
$$+ x_1^2x_3 \,\|\, x_1^2x_2 + x_4^2x_3 \,\|\, x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_1x_2x_4 \,\|\, x_2^2x_4 + x_3^2x_2 + x_1x_3x_4 \,\|.$$

$$21.\quad x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3 : \varepsilon^4 x_4, \qquad \varepsilon^7 = 1,$$

$$x_1^3 + x_2x_3x_4 \,\|\, x_2^3 + x_4^2x_3 + x_1x_2x_3 \,\|\, x_3^3 + x_2^2x_4 + x_1x_3x_4 \,\|\, x_4^3 + x_3^2x_2$$
$$+ x_1x_2x_4 \,\|\, x_1^2x_2 + x_3^2x_4 \,\|\, x_2^2x_1 + x_1^2x_3 + x_4^2x_2 \,\|\, x_1^2x_4 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 \,\|$$

und die übrigen Collineationen Indexes 7 liefern ebenfalls keine Typen.

$$22.\quad x_1 : x_2 : -ix_3 : \sqrt{i}\, x_4, \qquad i^2 = -1,$$

$$x_1^3 + x_4^3 + x_1^2x_2 + x_2^2x_1 + x_4^2x_3 \,\|\, x_3^3 + x_4^2x_1 + x_2^2x_1 + x_4^2x_3 \,\|\, x_3^3 + x_4^2x_1$$
$$+ x_4^2x_2 \,\|\, x_4^3 \,\|\, x_1^2x_3 + x_2^2x_3 + x_1x_2x_3 \,\|\, x_1^2x_4 + x_2^2x_4 + x_1x_2x_4 \,\|\, x_3^2x_1$$
$$+ x_3^2x_2 \quad x_3^2x_4 \,\|\, x_2x_3x_4 + x_1x_3x_4 \,\|.$$

$$23.\quad x_1 : -x_2 : -ix_3 : \sqrt{i}\, x_4, \qquad i^2 = -1,$$

$$x_1^3 + x_2^2x_1 + x_3^2x_2 + x_4^2x_3 \,\|\, x_2^3 + x_1^2x_2 + x_3^2x_1 \,\|\, x_3^3 + x_4^2x_1 + x_1x_2x_3 \,\|\, x_4^3$$
$$+ x_2x_3x_4 \,\|\, x_1^2x_3 + x_2^2x_3 + x_4^2x_2 \,\|\, x_1^2x_4 + x_2^2x_4 \,\|\, x_3^2x_4 + x_1x_2x_4 \,\|\, x_1x_3x_4 \,\|.$$

$$24.\quad x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^7 x_3 : \varepsilon^4 x_4, \qquad \varepsilon^9 = 1,$$

$$X_1^3 + X_2^2 X_3 + X_3^2 X_4 + X_4^2 X_2 \,\|\, x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_2 x_2 x_4 \,\|\, x_1^2 x_2 \,|\, x_1^2 x_3 \,\|\, x_1^2 x_4 \,\|\, x_2^2 x_1$$
$$+ x_1 x_3 x_4 \,\|\, x_2^2 x_3 + x_3^2 x_2 + x_4^2 x_3 \,\|\, x_3^2 x_1 + x_1 x_2 x_4 \,\|\, x_4^2 x_1 + x_1 x_2 x_3 \,\|.$$ [1]

$$25.\quad x_1 : -x_2 : \varepsilon x_3 : \varepsilon^\lambda x_4, \qquad \varepsilon^5 = 1,$$

verlangt einen Doppelpunkt in der F_3; ebenso die übrigen Collineationen des Indexes 10 wie

$$26.\quad x_1 : -\varepsilon x_2 : \varepsilon^3 x_3 : \varepsilon^4 x_4, \qquad \varepsilon^5 = 1,$$

$$x_1^3 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_4 \,\|\, x_2^3 + x_2 x_3 x_4 \,\|\, x_3^3 + x_2^2 x_4 \,\|\, x_4^3 + x_2^2 x_1 \,\|\, x_1^2 x_2 \,\|\, x_1^2 x_3 + x_4^2 x_1$$
$$+ x_1 x_3 x_4 \,\|\, x_2^2 x_4 + x_3^2 x_1 + x_4^2 x_3 \,\|\, x_3^2 x_2 \,|\, x_4^2 x_2 + x_1 x_2 x_3 \,\|\, x_1 x_2 x_4 \,\|.$$

$$27.\quad x_1 : -x_2 : \varepsilon x_3 : i x_4, \qquad \varepsilon^3 = 1, \quad i^2 = -1,$$

$$X_1^3 + X_3^3 + X_2^2 X_1 + X_4^2 X_2 \,\|\, x_2^3 + x_1^2 x_2 + x_4^2 x_1 \,\|\, x_4^3 \,\|\, x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3 \,\|\, x_1^2 x_4$$
$$+ x_2^2 x_4 \,\|\, x_3^2 x_1 \,\|\, x_3^2 x_2 \,\|\, x_3^2 x_4 \,\|\, x_4^2 x_3 + x_1 x_2 x_3 \,\|\, x_2 x_3 x_4 \,\|\, x_1 x_3 x_4 \,\|\, x_1 x_2 x_4 \,\|.$$

Hiermit endigen die Collineationen, welche irreductible F_3 invariant lassen. Unter den obigen sind die zerlegten und jene mit Doppelpunkt auszuschliessen, wenn dieser invariant ist. Denn diese können keinen Typus liefern, weil die aus dem Doppelpunkte von F_3 gemachte Projection dieser F_3 als Abbildung ersichtlich eine Collineation in der Ebene liefert. Es bleiben nur die in grossen Lettern geschriebenen Formen, unter welchen noch n° 6 1. Form einen invarianten Doppelpunkt auf $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ hat, ebenso wie die zwei letzten Formen n° 5 und n° 13, und aber die zwei Formen n° 2 gleichwerthig sind, ebensowie die zwei n° 7 und die vier n° 8. Die erübrigenden cubischen quaternären Formen sind:

$$1.\quad X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + X_1^2 X_2 + X_1^2 X_3 + X_2^2 X_1 + X_2^2 X_3$$
$$+ X_3^2 X_1 + X_4^2 X_1 + X_4^2 X_2 + X_4^2 X_3 + X_1 X_2 X_3, \qquad 1, 1, 1, -1.$$

$$2.\quad X_1^3 + X_2^3 + X_1^2 X_2 + X_2^2 X_1 + X_3^2 X_1 + X_3^2 X_2 + X_4^2 X_1$$
$$+ X_4^2 X_2 + X_1 X_3 X_4 + X_2 X_3 X_4, \qquad 1, 1, -1, -1.$$

[1] Die übrigen Collineationen mit dem Index 9 verlangen Doppelpunkt oder Decomposition der F_3.

3. $X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + X_4^3 + X_1^2 X_2 + X_2^2 X_1 + X_3^2 X_1$
$\quad + X_3^2 X_2 + X_1^2 X_3 + X_2^2 X_3 + X_1 X_2 X_3,$ $\qquad 1, \; 1, \; 1, \; \varepsilon_3.$

4. $X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + X_4^3 + X_1^2 X_2 + X_2^2 X_1,$ $\qquad 1, \; 1, \; \varepsilon_3, \; \varepsilon_3.$

5. $X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + X_4^3 + X_1^2 X_2 + X_2^2 X_1$
$\quad + X_1 X_3 X_4 + X_2 X_3 X_4.$ $\qquad 1, \; 1, \; \varepsilon_3, \; \varepsilon_3^2.$

6. $X_3^3 + X_4^3 + X_4^2 X_3 + X_3^2 X_4 + X_2^2 X_1 + X_1^2 X_4 + X_1^2 X_3,$ $\qquad 1, \; i, \; -1, \; -1.$

7. $X_1^3 + X_2^2 X_1 + X_1 X_3 X_4 + X_3^2 X_2 + X_4^2 X_2,$ $\qquad 1, \; -1, \; i, \; -i.$

8. $X_1^3 + X_2^3 + X_4^3 + X_1^2 X_2 + X_2^2 X_1 + X_3^2 X_1 + X_3^2 X_2,$ $\qquad 1, \; 1, \; -1, \; \varepsilon_3.$

9. $X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + X_4^2 X_1 + X_1 X_2 X_3,$ $\qquad 1, \; \varepsilon_3, \; \varepsilon_3^2, \; -1.$

10. $X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + X_4^2 X_1 + X_2^2 X_3 + X_3^2 X_2,$ $\qquad 1, \; \varepsilon_3, \; \varepsilon_3, \; -1.$

11. $X_1^3 + X_3^3 + X_2^2 X_1 + X_4^2 X_3,$ $\qquad 1, \; -1, \; \varepsilon_3, \; -\varepsilon_3.$

12. $X_1^3 + X_2^2 X_1 + X_3^2 X_2 + X_4^2 X_3,$ $\qquad 1, \; -1, \; -i, \; \sqrt{i}.$

13. $X_1^3 + X_2^2 X_3 + X_3^2 X_4 + X_4^2 X_2,$ $\qquad 1, \; \varepsilon_9, \; \varepsilon_9^7, \; \varepsilon_9^4.$

14. $X_1^3 + X_3^3 + X_2^2 X_1 + X_4^2 X_2,$ $\qquad 1, \; -1, \; \varepsilon_3, \; i.$

I. Theorem. *Wenn eine Collineation eine Gerade a_1 von F_3 in sich selbst verwandelt, so ist die abbildende ebene Transformation äquivalent einer Charakteristik mit 5 Punkten.*

Beweis. Nimmt man in das abbildende Sextupel die a_1, so erscheint das Bild von a_1 als Doppelpunkt der Ebene w. z. b. w. Ebenso wird bewiesen:

II. Theorem. *Wenn die Collineation zwei oder drei windschiefe Geraden von F_3 unter einander transformirt, so ist die Abbildung äquivalent einem Typus mit weniger als 6 Punkten.*

Da es mir hier nur auf die Typen ankommt, so wende ich diese beiden Theoreme sofort auf die vorhergehenden 14 Formen an. n° 1 hat stets eine invariante Gerade durch X_4, n° 2 die Doppelgerade $X_1 X_2$,

n° 7 die Gerade X_3X_4, n° 6 und n° 10 drei invariante Geraden in der Ebene $x_1 = 0$, n° 11 und 12 die Gerade X_2X_4, n° 4 enthält mehrere cyclische Tripel windschiefer Geraden; denn die Directricen sind im Allgemeinen von keiner Geraden der F_3 getroffen und die drei Geraden können niemals in einer Ebene sein. n° 5 und n° 6 gestatten ebenfalls windschiefe cyclische Tripel.

Es erübrigen die Formen n° 3, 8, 9, 13, 14. Stellen wir zuerst fest:

III. Theorem. *Die Transformationen, welche man durch Abbildung der collinearen Systeme auf* F_3 *erhält, indem man verschiedene Doppelsechsen verwendet, sind birational äquivalent.*

Es ist immer möglich, derart abzubilden, dass man den Typus erhält. Die Transposition mittelst der 6 Punkte liefert nämlich in der Ebene eine Transformation, welche wieder das Bild einer Collineation in F_3 ist. Diese Collineation muss aber wesentlich dieselbe sein wie die erste, es kann sich also nur die Art der Abbildung geändert haben, also entweder die Directricen von Clebsch oder das Sextupel von Reye.

IV. Theorem. *Unter den Geraden eines Sextupels sind* 0 *oder* 3 *oder* 4, *welche zwei und* 1, 3, 6 *welche* 5 *des transformirten Sextupels schneiden.*

Denn die Thatsache, dass 0 oder 2 oder 5 Geraden eines Sextupels eine der übrigen Geraden treffen, überträgt sich in die andere, dass die einzigen Fundamentalcurven, welche die Transformationen mit den 6 Punkten besitzen können, Gerade oder Kegelschnitte sind u. zw. in den bezüglichen Anzahlen.

V. Theorem. *Die Collineationen auf der* F_3 *n°* 3 *hat als Bild den Typus vom* 4. *Grade und Index* 3, *welcher l. c. als* Δ_3 *bezeichnet ist.*

Beweis. Man kann zwei successive Geraden wählen aa', sodass dieselben in zwei conjugirte Sextupel eintreten, a' wird eine Fundamentalgerade liefern. Zwei successive Geraden können sich nicht im selben Sextupel finden, weil sie sich immer schneiden; daher sind alle 6 Punkte fundamental und die Transformation ist biquadratisch. Die drei Geraden a, welche in Doppelsecanten transformirt sind, bilden ein windschiefes Tripel, ebenso die drei Doppelsecanten und da zwei successive Geraden

sich schneiden, ist $(d_1\varepsilon_2)$, $(d_2\varepsilon_3)$, $(d_3\varepsilon_1)$ bedingt. Die andere Doppeldrei hat gleiche Verkettung. Überdies: Die Schnittcurve mit $x_4 = 0$ ist Ort von Doppelpunkten und gibt als Bild eine C_3, Ort von Doppelpunkten. Die C_3, deren Ebenen durch X_4 gehen, sind C_e und liefern in der Ebene das Netz, welches l. c. für Δ_3 gefunden wurde. Die Geraden der Doppelsechs schneiden $x_4 = 0$ in 6 Punkten zweier Inflexionsgeraden, welche sich als zwei Tangentialcyclen abbilden.

VI. Theorem. *Die Collineation auf der F_3 n° 8 hat als Bild den Typus B_6.*

Beweis. Die Collineation ist die Zusammensetzung der vorhergehenden mit einer involutorischen Collineation, welche die zwei Doppeldreien der abbildenden Doppelsechs unter einander vertauscht was die Wirkung hat, dass niemals zwei successive Geraden sich schneiden und dass niemals eine Gerade in eine Gerade des conjugirten Sextupels transformirt ist. n° 8 beweist die Existenz einer C_3 mit ∞^1 involutorischen Paaren und zweier invarianter Geradentripel, deren Ebenen durch X_3X_4 gehen. So erkennt man die Figur, welche l. c. für a' in b, b' in c, c' in a oder B_6 gefunden ist.

VII. Theorem. *Die Collineation auf der F_3 n° 9 hat als Bild den Typus Γ_6.*

Beweis. Die Ebene $x_4 = 0$ schneidet F_3 in einer C_3, welche eine Correspondenz $u' - u \equiv \gamma$ vom Index 3 trägt; durch X_4 gehen drei Gerade der F_3 in $x_1 = 0$, welche ein cyclisches Tripel bilden und sich in die Ebene ebenfalls in drei solche Gerade abbilden. Da man zwei Geraden finden kann, welche successiv und windschief sind, so erhält man für die Ebene eine Verkettung und indem man beweist, dass nicht mehr als eine Gerade des Sextupels sich in eine Gerade des conjugirten Sextupels verwandeln kann, beweist man, dass T cubisch wird. Ohne ausfürlich die Configuration der 27 Geraden aufzuschreiben, ist es unmöglich, aus ihr die Characteristik (ab_1), (ba_1), (a_2b_2), (a_3b_3), b_4 in a_4 zu construiren, während man aus der Übereinstimmung der invarianten C_3 die vollständige Identität erschliessen kann.

VIII. Theorem. *Die Collineation auf F_3 n° 12 hat als Bild die B_9 l. c.*

Beweis. Ohne die Configuration der 27 Geraden zu studiren, will ich n° 12 in diese andere Form bringen $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$, was immer durch eine lineare Substitution x_2, x_3, x_4 allein möglich ist, indem $x_2^2x_3 + x_3^2x_4 + x_4^2x_2 = 0$ äquianharmonisch ist. Die Collineation wird die Form haben $\varepsilon x_2 : \varepsilon^4 x_3 : \varepsilon^7 x_1 : \varepsilon x_4$, wo $\varepsilon^9 = 1$. Die Sextupel dieser F_3 schneiden die Ebene $x_1 = 0$ in zwei alineirten Tripeln von Wendepunkten, woraus man im selben Sextupel zwei Verkettungen und also die Ordnung der Transformation ableiten kann. Die 4 invarianten C_3 stellen die Identität mit B_9 fest.

IX. Theorem. *Die Collineation auf F_3 n° 13 hat als Bild die B_{12}.*

Die Ebene $x_1 = 0$ enthält eine C_3^3, $x_2 = 0$ enthält drei Geraden durch X_4, welche ein cyclisches Tripel bilden, $x_3 = 0$ eine C_h und $x_4 = 0$ eine C_e. Man sucht unter den Geraden 4, welche eine Succession bilden und hat hiermit Reduction auf die Ordnung 2.

Conclusion: *Die existirenden periodischen Transformationen mit 6 Punkten, welche nicht unter einander äquivalent sind, sind die folgenden:*

$$\Delta_3,\ B_6,\ B_9,\ B_{12},\ \Gamma_6 \text{ oder } XXVII_3,\ I_6,\ II_9,\ III_{12},\ XIV_6,$$

also die in der citirten Abhandlung aufgeschriebenen Typen.

Der Anwendung halber soll das Resultat der Abbildung der 14 Collineationen auf p. 148 vollständig angeführt werden:

1. liefert die cubische Involution (cc'), $(a_i b_i)$, 2. zwei Doppelpunkte und zwei involutorische Paare einer Collineation, 3. XXVII_3, 4. drei Doppelpunkte und ein cyclisches Tripel einer Collineation, 5. zwei cyclische Tripel einer Collineation, 6. liefert (cc'), a' in b, b' in a nebst einem Doppelpunkte, 7. ein Quadrupel und ein involutorisches Paar einer Collineation, 8. I_6, 9. XIV_6, 10. a' in a, b' in b, c' in c, 11. (ab'), (bc'), (ca') mit einem Doppelpunkte und einem involutorischen Paare, 12. (ab'), (bc'), a' in a_1' in c mit Doppelpunkt, 13. II_9, 14. III_{12}.

Anmerkung. Die Flächen 4, 11, 13, 14 gestatten, unter der Form $\xi_1^3 + \xi_2^3 + \xi_3^3 + \xi_4^3$ geschrieben zu werden. — Ferner sind die Flächen, welche durch jede der Collineationen reproducirt werden, ∞^λ und wenn

man die Abbildung aller gleichzeitig macht, was wegen der Vertheilung der Geraden möglich ist, erhält man in der Ebene ein ∞^λ System von birationalen Transformationen.

§ 2. *Die typischen Transformationen mit 7 Punkten.*

1. Das Netz der C_3 durch die 7 Punkte ist invariant, also auch die Jacobische Curve D_6, auf welcher eine Correspondenz entsteht. Umgekehrt:

X. Theorem. *Durch die Correspondenz auf der Jacobischen Curve D_6 ist die ebene Transformation bestimmt.*

Beweis. Jede C_3 des Büschels schneidet D_6 in einem Quadrupel von Punkten und diese Reihe g_4^1 ist in sich transformirt wegen des Theoremes XXXV. Die so entstehende 2-deutige Transformation zerlegt sich in zwei eindeutige Theile, von welchen der eine die Zusammensetzung des anderen mit der Involution (von Geiser) θ_2 ist, und der eine die Wiederholung des anderen ist, wenn der Index des einen ungerade ist.

Man kann jeder D_6 mit 7 Doppelpunkten eindeutig eine Curve L_4 4. O. $p = 3$ entsprechen machen. Die eindeutigen Correspondenzen auf C_6 haben als Bilder in L_4 eindeutige Correspondenzen. Diese aber sind stets in einer Collineation der Ebene enthalten. Ich wende nun die Umkehrung der Frage an, wie ich es im § 1 für die cubischen Flächen machte.

XI. Theorem. *Für eine gegebene Curve L_4 erhält man sofort eine Curve C_6 mit 7 Doppelpunkten, welche zu jener in 1-1-deutiger Beziehung ist, mittelst eines Septupels unabhängiger Doppeltangenten.*

Beweis. Es ist die Umkehrung des Theoremes von Aronhold, welcher vom Netze der C_3 ausging. Die 7 Doppeltangenten bestimmen das Netz, welchem eine Jacobische Curve C^6 (dual) angehört und der Ort der Berührungspunkte für die Büschel mit Berührung ist die gegebene Curve L_4. Die eindeutige Relation hat also hier überdies die Eigenschaft der Incidenz, d. h. dass jeder Punkt von L_4 mit der entsprechenden Geraden von C^6 incident ist.[1]

---

[1] Solches eindeutiges Entsprechen einer Curve C_n und einer Enveloppe I^m mit Bedingung der Incidenz erhält man sehr einfach durch Verbindung entsprechender Punkte

XII. Theorem. *Jede birationale Transformation oder Gruppe von birationalen Transformationen, welche 7 Punkte in der Charakteristik hat, bringt gleichzeitig eine Collineation oder Gruppe von Collineationen unter den Geraden der Ebene hervor.*

Denn die Transformation bringt eine Correspondenz auf D_6 hervor, welche wegen des Theoremes XI zum Bilde eine Correspondenz in der Curve 4. Classe von Aronhold hat und diese ist in einer Collineation der Ebene enthalten, deren Index also die Hälfte des Indexes der Transformation sein kann.

XIII. Theorem. *Wenn man jeder C_3 den Schnittpunkt der Tangenten in den 4 Schnittpunkten mit D_6 zuordnet, erhält man eine lineare Beziehung mit Incidenz.*

Der einzuschlagende Weg ist also der folgende. Ich stelle die biquadratischen Curven L_4 auf, welche eine Collineation gestatten, nehme unter den 28 Doppeltangenten ein Septupel von Aronhold und verfolge die Verwandlung dieses Septupels durch die Collineation. Die verschiedenen Doppeltangenten entsprechen nach Theorem XI. (dual gesprochen) Geraden oder Kegelschnitten oder C_3^4 oder den 7 Punkten des Septupels selbst.

So leiten sich die Characteristiken der zwei annexen birationalen Transformationen mittelst der Verwandlung unter den 28 Doppeltangenten der Curve L_4 her, und finden in dieser Verwandlung ihren vollständigen Ausdruck.

3. Zur Auffindung der Collineationen mit invarianter L_4 wende ich das dritte Mal die Methode der canonischen Formen an.

$$\text{I.} \quad x_1 : x_2 : -x_3,$$

$$X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 + X_1^2X_2^2 + X_2^2X_3^2 + X_1^3X_2 + X_1X_2^3 + X_1X_2X_3^2 + X_1^2X_2^2 \mid x_1x_3^3 + x_2x_3^3 + x_1^3x_3 + x_2^3x_3 + x_2x_3x_1^2 + x_1x_3x_2^2 \mid .$$

---

zweier eindeutig bezogener Curven. Umgekehrt kann jedes Incidenzpaar C_n, Γ^m auf unendlich viele Arten so entstanden gedacht werden. Es giebt stets unendlich viele einfach rationale Transformationen, für welche C_n, Γ^m die beiden Incidenzcurven sind. Es giebt aber nicht immer einfach rationale Nullsysteme, in denen sie sich entsprechen.

Dieselben Aussprüche gelten auch für eine M_{r-1}^n und eine Enveloppe M_{r-1}^n von R_{r-1} im R_r.

$$2.\quad x_1 : x_2 : \varepsilon x_3, \qquad \varepsilon^3 = 1,$$

$$X_1^4 + X_2^4 + X_1^2X_2^2 + X_1X_3^3 + X_2X_3^3 + X_1^2X_3 + X_1X_2^3 \,\|\, x_1^3x_3 + x_2^3x_3 + x_3^4$$
$$+ x_1x_2^2x_3 + x_1^2x_2x_3 \,\|\, x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 + x_1x_2x_3^2 \,\|.$$

$$3.\quad x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3, \qquad \varepsilon^3 = 1,$$

$$X_1^4 + X_1^2X_2X_3 + X_1X_2^3 + X_1X_3^3 + X_2^2X_3^2 \,\|\, x_3^4 + x_2^3x_3 + x_1^3x_3 + x_3^2x_1x_2$$
$$+ x_1^2x_2^2 \,|\, x_1x_3x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_1^3x_2 + x_3^3x_2 + x_2^4 \,\|.$$

$$4.\quad x_1 : x_2 : i x_3, \qquad i^2 = -1,$$

$$X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 + X_1^2X_2^2 + X_1^3X_2 + X_1X_2^3 \,\|\, x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 + x_1x_2x_3^2 \,\|\, x_2x_3x_1^2$$
$$+ x_1x_3x_2^2 + x_1^3x_3 + x_2^3x_3 \,\|\, x_3^3x_1 + x_3^3x_2 \,\|.$$

$$5.\quad x_1 : -x_2 : i x_3, \qquad i^2 = -1,$$

$$X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 + X_1^2X_2^2 + X_1X_2X_3^2 \,|\, x_1^2x_3^2 + x_1x_2^3 + x_1^3x_2 + x_2^2x_3^2 \,\|\, x_1^2x_2x_3$$
$$+ x_2^3x_3 + x_1x_3^3 \,\|\, x_1x_3x_2^2 + x_2x_3^3 + x_1^3x_3 \,\|.$$

$$6.\quad x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3, \qquad \varepsilon^5 = 1,$$

$$x_1^4 + x_2^3x_3 + x_1x_2x_3^2 \,|\, x_1x_3^3 + x_2^2x_3^2 + x_1^3x_2 \,\|\, x_1^2x_2^2 + x_1^3x_3 + x_2x_3^3 \,\|\, x_3^4 + x_1^2x_2x_3$$
$$+ x_2^3x_3 \,\|\, x_2^4 + x_1^2x_3^2 + x_1x_2^2x_3 \,\|.$$

$$7.\quad x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^4 x_3, \qquad \varepsilon^5 = 1,$$

$$x_1^4 + x_1^2x_2x_3 + x_2^2x_3^2 \quad x_1^3x_2 + x_1x_2^2x_3 + x_3^4 \,\|\, x_1^2x_2^2 + x_2^3x_3 \,\|\, x_4^3 + x_1x_2^3 + x_2x_3^3$$
$$+ x_1x_2x_3^2 + x_1^2x_3^2 \,\|\, x_2^4 + x_1^3x_3 \,\|.$$

$$8.\quad x_1 : -x_2 : \varepsilon x_3, \qquad \varepsilon^3 = 1,$$

$$X_1^4 + X_2^4 + X_1^2X_2^2 + X_1X_3^3 \,|\, x_1^3x_3 + x_3^4 + x_1x_2x_3^2 \,\|\, x_2^2x_3^2 + x_1^2x_3^2 \,\|\, x_1^2x_2x_3$$
$$+ x_1^3x_3 \,\|\, x_1^3x_2 + x_2^3x_1 + x_2x_3^3 \,\|\, x_1x_2x_3^2 \,\|.$$

$$9.\quad x_1 : \varepsilon x_2 : -\varepsilon^2 x_3, \qquad \varepsilon^3 = 1,$$

$$x_1^4 + x_2^2x_3^2 + x_1x_2^3 \,\|\, X_2^4 + X_3^4 + X_1^2X_3^2 + X_1^3X_2 \,|\, x_1^2x_2^2 + x_1x_2x_3^2 \,\|\, x_1^2x_2x_3$$
$$+ x_1x_3^3 \,\|\, x_1x_3x_2^2 + x_2x_3^3 \,\|\, x_1^3x_3 + x_2^3x_3 \,\|.$$

$$10. \quad x_1 : \varepsilon x_1 : \varepsilon^2 x_3 \qquad \varepsilon^7 = 1,$$

$$x_1^4 + x_1x_2x_3^2 \,\|\, x_2^4 + x_1^2x_2x_3 \,\|\, x_3^4 + x_1x_3x_2^2 \,\|\, x_1^3x_2 + x_2^2x_3^2 \,\|\, X_1^3X_3 + X_1X_2^3$$
$$+ X_2X_3^3 \,\|\, x_1x_3^3 + x_1^2x_2^2 \,\|\, x_2^3x_3 + x_1^2x_3^2 \,\|.$$

$$11. \quad x_1 : ix_2 : \sqrt{i}\, x_3, \qquad i^2 = -1,$$

$$x_1^4 + x_2^4 \,\|\, x_3^4 + x_1^2x_2^2 + x_1x_2x_3^2 \,\|\, x_1^3x_2 + x_1x_3^2 \,\|\, x_1^3x_3 \,\|\, x_1x_3^3 + x_2^3x_3 + x_2x_3^3$$
$$+ x_1x_3x_2^2 \,\|\, x_1x_2^3 \,\|\, x_1^2x_2x_3 \,\|.$$

$$12. \quad x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^3 x_3, \qquad \varepsilon^9 = 1,$$

$$x_1^4 + x_1x_3^3 \,\|\, x_1^3x_2 + x_2x_3^3 \,\|\, x_1^2x_2^2 \,\|\, x_2^4 + x_1^2x_2x_3 \,\|\, X_3^4 + X_1X_2^3 + X_1^3X_3 \,\|\, x_3x_2^3$$
$$+ x_1^2x_3^2 \,\|\, x_3^2x_2^2 \,\|\, x_2^2x_1x_3 \,\|\, x_3^2x_1x_2 \,\|.$$

$$13. \quad x_1 : ix_2 : \varepsilon x_3, \qquad i^2 = -1, \quad \varepsilon^3 = 1,$$

$$X_1^4 + X_1X_3^3 + X_2^4 \,\|\, x_1x_2^3 \,\|\, x_1^2x_2^2 \,\|\, x_3^4 + x_1^3x_3 \,\|\, x_2^2x_3^2 \,\|\, x_1^2x_3^2 \,\|\, x_2x_3^3$$
$$+ x_1^3x_2 \,\|\, x_1^2x_2x_3 \,\|\, x_1x_2^2x_3 \,\|\, x_1x_2x_3^2 \,\|\, x_2^3x_3 \,\|.$$

XIV. Theorem. *Wenn die Collineation eine Doppeltangente der L_4 invariant lässt, ist eine der birationalen Transformationen, welche ihr entsprechen, äquivalent einer Transformation mit 6 Punkten in der Characteristik.*

Beweis. Man kann ein Septupel nehmen, in welchem die invariante Tangente vorkommt. Dann entspricht der Basispunkt der C_3, welcher diese Tangente abbildet, sich selbst oder ist ein Doppelpunkt der Ebene.

XV. Theorem. *Alle Transformationen, welche man aus einer Collineation von L_4 durch die Variation des Septupels der Doppeltangenten erhält, sind birational äquivalent und umgekehrt.*

XVI. Theorem. *Unter diesen Transformationen kann man stets auch den Typus erhalten.*

XVII. Theorem. *Jede Collineation auf L_4 gibt zwei birationale Transformationen der Ebene. Man erhält die eine aus der anderen, indem man mit der involutorischen Transformation J_8 zusammensetzt.*

Wenn das unabhängige Septupel einmal angenommen ist, so hat man die folgende Regel, um die Curve zu finden, in welche ein Doppel-

punkt a_1 von L_4 durch die birationale Transformation verwandelt ist. Man sucht den Doppelpunkt f, in welchen sich a_1 durch die Collineation verwandelt. Derselbe sei in einem gewissen Kegelschnitte durch 5 Punkte a. Dann kann man a_1 entweder diesem Kegelschnitte oder der complementären Geraden $a_i a_k$ entsprechen machen. Aber hierdurch ist die Transformation bestimmt und man muss einem anderen Punkte a_2 entsprechen machen, was bedingt ist.

XVIII. Theorem. *Wenn sich das Septupel $a_1 \dots a_7$ durch die Collineation in ein anderes verwandelt, das mit $a_1 \dots a_7$ λ Punkte gemeinsam hat, so hat die entsprechende birationale Transformation $7 - \lambda$ Fundamentalpunkte.*

Beweis. Jedes Paar von entsprechenden Punkten unter $a_1 \dots a_7$ liefert eine Verkettung in der Characteristik und einer dieser beiden Punkte kann nicht fundamental sein für das eine System.

Um die Doppeltangenten von L_4 nicht berechnen zu müssen, begnüge ich mich hier, über die birationale Transformation durch Vergleichung mit meiner Preisschrift zu entscheiden, indem ich einige Bemerkungen über die Doppeltangenten einflechte. Die aus obiger Übersicht resultirenden L_4 sind:

1. $X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 + X_1^2X_3^2 + X_2^2X_3^2 + X_1^3X_2 + X_2^3X_1$
$\qquad + X_1X_2X_3^2 + X_1^2X_2^2,$ $\qquad 1, \; 1, \; -1.$

2. $X_1^4 + X_2^4 + X_1^2X_2^2 + X_3^3X_1 + X_3^3X_2 + X_1^3X_2 + X_2^3X_1,$ $\qquad 1, \; 1, \; \varepsilon.$

3. $X_1^4 + X_2^3X_1 + X_3^3X_1 + X_1^2X_2X_3 + X_2^2X_3^2,$ $\qquad 1, \; \varepsilon, \; \varepsilon^2.$

4. $X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 + X_1^2X_2^2 + X_1^3X_2 + X_2^3X_1,$ $\qquad 1, \; 1, \; i.$

5. $X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 + X_1^2X_2^2 + X_1X_2X_3^2$ $\qquad 1, \; -1, \; i.$

6. $X_1^4 + X_2^4 + X_1^2X_2^2 + X_1X_3^3,$ $\qquad \varepsilon^3 = 1,$ $\qquad 1, \; -1, \; \varepsilon.$

7. $X_1^3X_3 + X_3^3X_2 + X_2^3X_1,$ $\qquad \varepsilon^7 = 1,$ $\qquad 1, \; \varepsilon, \; \varepsilon^3.$

8. $X_2^4 + X_1^3X_3 + X_3^3X_1,$ $\qquad 1, \; \sqrt{i}, \; -1.$

9. $X_3^4 + X_2^3X_1 + X_1^3X_3,$ $\qquad \varepsilon^9 = 1,$ $\qquad 1, \; \varepsilon, \; \varepsilon^3.$

10. $X_1^4 + X_3^3X_1 + X_4^2,$ $\qquad \varepsilon^3 = 1,$ $\qquad 1, \; i, \; \varepsilon.$

Lemma. Der Identität der Ebene entspricht der involutorische Typus θ_2 (oder J_8).

XIX. Theorem. *Die Curve L_4 n° 1 liefert durch ihre Collineation eine involutorische Transformation von Jonquières.*

Beweis. Unter den Tangenten von X_3 existiren i. A. 4 Doppeltangenten, welche fest bleiben, also ist eine der Transformationen reductibel in der Zahl der Characteristikpunkte. Sie besitzt eine C_3 mit Doppelpunkten, ist also von der Ordnung 3. Dann ist die andere nothwendig eine involutorische Collineation, was anzeigt, dass man auf L_4 ein unabhängiges Septupel finden kann, welches durch die Collineation in sich transformirt ist.

XX. Theorem. *Die Curve L_4 n° 2 liefert durch ihre Collineation den Typus Δ_3 und überdies Γ'_6 (cit. Abh.).*

Beweis. Die zwei Transformationen haben ein Büschel invarianter C_e; die Tangente im Punkte X_1 an L_4 ist undulatorisch und invariant. Also ist eine der Transformationen auf 6 Punkte reductibel. Da jene des Indexes 3 eine Curve C_3 mit Doppelpunkten besitzt, welche durch den Punkt geht, welcher der Inflexionstangente entspricht, folgt, dass diese Transformation jene ist, welche man auf 6 Punkte reduciren kann. Der Vergleich mit Tafel I meiner cit. Abh. lehrt, dass die andere Γ'_6 ist.

XXI. Theorem. *Die Curve L_4 n° 3 liefert durch ihre Collineation eine ebene Collineation und den Typus Γ'_6.*

Beweis. Die Gerade $x_1 = 0$ ist Doppeltangente und eine Transformation kann also äquivalent gemacht werden einer Transformation mit weniger als 7 Punkten. Es ist leicht zu sehen, dass man mit zwei cyclischen Tripeln von Doppeltangenten ein unabhängiges Septupel ergänzen kann. Die Vertheilung der invarianten C_3, nämlich $C_1 + C_2$ und zwei C_e beweisen dann die Identität der zweiten Transformation mit Γ'_6.

XXII. Theorem. *Die Curve L_4 n° 4 liefert durch ihre Collineation den Typus E_4 und die quadratische Transformation (cc'), a' in b, b' in a.*

Beweis. Das Büschel invarianter C_h enthält vier C_3 mit tacnode. Man kann zwei der Undulationstangenten in das Septupel nehmen, was die

Zahl der Characteristikpunkte einer Transformation um 2 reducirt. Man beweist aber auch, dass man nicht um mehr reduciren kann und also diese Transformation mit ∞^1 involutorischen Paaren in einer C_3 die im Theoreme genannte ist. Die andere Transformation ist ebenso vom Index 4, besitzt ∞^1 Doppelpunkte in einer C_3 und ausserhalb ein involutorisches Paar, entsprechend dem Punkte X_3, das in die Basis eines Büschels von C_h eintritt. Ein Septupel ohne Undulationstangente enthält zwei successive Doppeltangenten und, da die Verkettung der ersten Transformation angehört, besitzt sie einen dreifachen Punkt und ist also sicherlich von der 5. Ordnung etc. So schliesst man auf die Identität mit E_4.

XXIII. Theorem. *Die Curve* L_4 *n°* 5 *liefert durch ihre Collineation eine cubische Transformation* (ab), $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, b_3 *in* a_3, b_4 *in* a_4 *und eine mit* (cc'), (ab'), a' *in* b *äquivalente Transformation.*

Beweis. Wegen $X_1 X_2$ besitzen beide Transformationen eine C_k, Ort der involutorischen Paare. In der einen entspricht X_3 ein involutorisches Paar, X_1 und X_2 Paare von Doppelpunkten, in der anderen entspricht X_3 ein Paar von Doppelpunkten und X_1 und X_2 involutorische Paare. Also ist in der ersten die Correspondenz in C_k von der Art $u' + u \equiv \gamma$ und in der letzteren von der Art $u \equiv \gamma$. Diese letztere Transformation kann von der auf p. 223 l. c. beschriebenen nicht verschieden sein und hieraus ergibt sich die andere Transformation.

XXIV. Theorem. *Die Curve* L_4 *n°* 6 *liefert durch ihre Collineation zwei Transformationen, welche mit* B_6 *und* Δ_6 *äquivalent sind.*

Beweis. $x_1 = 0$ ist eine Undulationstangente, also kann eine Transformation auf 6 Punkte reducirt werden und die Existenz der Ortscurve mit $u' + u \equiv \gamma$ beweist die Äquivalenz mit B_6. Die andere Transformation hat eine C_3 mit $u' - u \equiv \gamma$ und da man Γ_6 nicht erwarten kann, weil der einzige Doppelpunkt von Γ_6 mit zwei Punkten der Charakteristik alineirt ist,[1] muss ein anderer Typus supponirt werden. Ich besitze die Rechnungen, wonach die Zusammensetzung $B_6 . \theta_2$ auf Δ_6 führt, welche Characteristik also constructibel ist und eine C_3 mit $u' - u \equiv \gamma$ besitzt.

[1] Man kann auch (cc'), a' in a_1' in b, b' in b_1' in a nicht erhalten, weil die 6 letzten Punkte immer in einem Kegelschnitte sind und also die D_6 zerfällt.

XXV. Theorem. *Die Curve L_4 n° 7*[1] *liefert durch ihre Collineation mittelst eines anallagmatischen Septupels eine ebene Collineation und die B_{14}.*

Beweis. Dass man ein solches Septupel finden kann, ist leicht zu beweisen und B_{14} ist die Zusammensetzung dieser Collineation mit θ_2.

XXVI. Theorem. *Die Curve L_4 n° 8 liefert durch ihre Collineation die zwei Transformationen (ab'), (bc'), a' in a'_1 in c und (cc'), (ab'), a' in a'_1 in a'_2 in c.*

XXVII. Theorem. *Die Curve L_4 n° 9 liefert durch ihre Collineation die zwei Transformationen B_9 und B_{18}.*

XXVIII. Theorem. *Die Curve L_4 n° 10 liefert durch ihre Collineation die zwei Transformationen B_{12} und B'_{12}.*

Beweis. Die eine ist sicherlich auf 6 Punkte reductibel und die drei Curven C_e, C_h, C_3^3 beweisen, dass sie B_{12} mit einem Doppelpunkte ist. Die andere hat dieselben invarianten C_4 und durch passende Wahl des Septupels kann man B'_{12} erhalten.

Conclusion: *Die existirenden typischen Transformationen mit 7 Punkten, welche nicht Jonquières'sche mit (ab) sind, sind die folgenden:*

$$B'_{12}\,,\ B_{18}\,,\ \Gamma'_6\,,\ \Gamma''_6\,,\ \Delta_6\,,\ E_4\,,\ \theta_2$$

$$\text{oder}\ V_{12}\,,\ VI_{18}\,,\ XV_6\,,\ XVI_6\,,\ XXIX_6\,,\ XXXIV_4\,,\ XLIII_2.$$

Anmerkung. Die Formen 1.—10. enthalten unbestimmte Coefficienten und jede gestattet überdies 273 Septupel (abgesehen von particulären Doubluren). Man erhält also durch Bildung der birationalen Transformationen für alle diese Septupel ∞^λ Systeme von periodischen birationalen Transformationen, welche sich in mehrere Systeme niederen Grades zerlegen.

§ 3. *Die Typen mit 8 Punkten.*

Eine Transformation mit den 8 Punkten $a_1 \ldots a_8$ bringt unter den C_3 eine Projectivität hervor, lässt den 9. Scheitel a_9 vollständig invariant

[1] Diese Curve wurde von Herrn Klein in seiner Darstellung der Transformation 7. Ordnung der elliptischen Functionen angetroffen und dann von Herrn Gordan untersucht.

vertauscht je $12 C_3$ mit gleicher absoluter Invariante $S^3 : T^2$ unter einander, transformirt auch die ∞^3 $C_6(a_1^2 \ldots a_8^2)$ unter einander und also ihre Jacobische Curve $D_9(a_1^3 \ldots a_8^5)$ in sich selbst. Die D_9 hat i. A. keine Singularitäten ausserhalb a_i und also $p = 4$. Daher mit Bezug auf I. Theil XXXVII:

XXIX. Theorem. *Die Curve D_9 eines Büschels von C_3, welches die Characteristik einer birationalen Transformation (ausser Σ_2) zulässt, ist derart special, dass sie eine eindeutige analytische Correspondenz unter ihren Punkten gestattet.*

Lemma. Eine Correspondenz unter zwei elliptischen Curven, welche selbe absolute Invariante ϖ haben, ist auf zwei Arten bestimmt für willkürliche ϖ, auf 4 oder 6 Arten für $\varpi^4 = 1$ oder $\varpi^3 = 1$, sobald man zwei entsprechende Punkte kennt.

XXX. Theorem. *Durch die eindeutige Correspondenz in D_9 sind im A. zwei Transformationen bestimmt, welche ihre Characteristik auf $a_1 \ldots a_8$ haben.*

Beweis. Jede C_3 schneidet auf D_9 ein Tripel aus und da D_9 keine andere g_3^1 besitzt, so sind diese Tripel unter einander transformirt. Dies gibt eine lineare Transformation unter den C_3 und man hat für jedes Paar entsprechender C_3 gemäss dem Lemma zweierlei Correspondenzen, bestimmt durch die Schnittpunkte mit D_9. Die Gesammtheit dieser Correspondenzen bildet die 2 Transformationen der Ebene.

Wenn jedoch in Folge besonderer Beschaffenheit von D_9 das C_3-Büschel panharmonisch oder panäquianharmonisch wird, so sind 4 oder 6 Transformationen durch D_9 bestimmt.

2. Das Problem ist also darauf reducirt, die Curven D_9 zu finden, welche eindeutige interne Correspondenzen zulassen. Es ist also passend, D_9 durch eine Normalcurve zu ersetzen, nach Riemannscher Terminologie. Hierzu kann die Transformation unter den Punkten einer Doppelebene und den Paaren der Involution $\Sigma_2(a_1 \ldots a_9)$ dienen, vermittelt durch die $C_6(a_1 \ldots a_8)$, welche durch ein festes Punktepaar von Σ_2 gehen. Die C_6 schneiden D_9 in 6 Punkten, weshalb die Übergangscurve von der 6. Ordnung sein wird, Z_6. Die C_3^1 durch das feste Punktepaar bildet mit den $\infty^1 C_3$ $\infty^1 C_6$, welche D_9 nur in drei variabeln Punkten schneiden, weshalb

Z_6 einen dreifachen Punkt hat. Aber die C_3^1 schneidet D_9 nur in 3 Punkten, welche die unendlich nahen Punkte des dreifachen Punktes darstellen, weshalb sich C_3^1 in die Gerade verwandelt, in welcher die drei Tangenten des dreifachen Punktes R coincidiren. Die drei Zweige müssen also unter einander eine Osculation haben, oder in R sind zwei dreifache Punkte unendlich nahe gerückt. Also (cf. auch Nöther, Erlanger Berichte 1878).[1]

XXXI. Theorem. *Die Curve D_9 ist derart particulär unter den Curven $p = 4$, dass die Normalcurve Z_6 zwei unendlich nahe dreifache Punkte besitzt.*

3. Man würde die Ordnung bis auf 5 vermindern können, indem man eine quadratische Transposition anwendet, welche zwei unendlich nahe Hauptpunkte in R längs der Tangente in R und den 3. Hauptpunkt willkürlich auf Z_6 hat.

XXXII. Theorem. *Die Curven $p = 0$, $u = 0$ mit $a_1 \dots a_8$ sind durch die zweideutige Transposition in die Kegelschnitte verwandelt, welche in R die Z_6 tangiren und überdies eine dreifache Berührung mit Z_6 haben.*[2]

Denn jede dieser Curven schneidet D_9 in 3 Punkten, etc.

XXXIII. Theorem. *Eine birationale Transformation mit $a_1 \dots a_8$ überträgt sich durch die zweideutige Transposition in eine quadratische Transformation, welche zwei Paare (aa'), (bb') in R längs der Tangente hat und Z_6 in sich transformirt.*

Beweis. Die Geraden der Doppelebene sind verwandelt in Curven C_6 und diese in andere Curven C_6 ausserhalb des transponirenden Netzes und diese gegen die Doppelebene in die beschriebenen Kegelschnitte.

---

[1] Die wahre Particularität dieser Curve ist neuerdings durch Herrn Schottky im Journal von Crelle, Bd. 103, p. 185: *Über specielle Abel'sche Functionen 4. Ranges* klargestellt worden.

[2] Die Curven $p = 0$, $n = 0$ sind jene, welche Herr Schottky l. c. als $G_{\alpha\beta\gamma}$ (Ordnung 2), $H_{\alpha\beta}$ (Ordnung 3), $J_{\alpha\beta\gamma}$ (Ordnung 4), $K_{\alpha\beta}$ (Ordnung 5), $L_{\alpha 9\pi}$ (Ordnung 6), bezeichnet und für welche die Relationen bestehen $L_{\alpha\beta 9} = F_{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}$, $L_{\alpha\beta\gamma} = G_{\alpha\beta\gamma} J_{\alpha\beta\gamma}$, $L_{\alpha\beta\pi} = H_{\alpha\beta} H_{\beta\alpha}$ unter Berücksichtigung von $\Phi = 0$, d. h. im Schnitte mit D_9.

Herr Schottky erwähnt auch am Ende seiner Abhandlung die Darstellung von $\Phi (= D_9)$ als Function von A, B, U, von welcher ich am Ende des I. Theiles gesprochen habe. Ich habe seine Arbeit am 8. Februar d. J. kennen gelernt, während jener Paragraph bereits im Winter 1892 geschrieben war.

4. Das Problem, alle Typen zu finden, ist so reducirt auf das Problem, quadratische Transformationen zu finden, welche eine Curve Z_6 der beschriebenen Art in sich transformiren.

5. Wenn es sich nur um die einzelnen Typen handelt (nicht um die Gruppen) kann man sich auf die Untersuchung von Collineationen beschränken. Denn wegen der Periodicität ist es unmöglich, dass beide Doppelgeraden der Projectivität in R sich in der Tangente vereinigen und ebenso dass beide Doppelpunkte auf einer solchen Doppelgeraden nach R rücken. Ist d ein Doppelpunkt in endlicher Entfernung von R, so wird die quadratische Transposition $RR'd$, wo $RR' = t_r$, die periodische quadratische Transformation in eine Collineation übertragen. Die Curve Z_6 wird in eine Curve derselben Art verwandelt. Man kann sich nicht auf den Fall einer Curve Z_5 mit tacnode beschränken, denn in dem Falle, wo der Index der Transformation auf Z_6 durch 3 theilbar ist, wäre es möglich, dass Z_6 gar keinen Doppelpunkt der quadratischen Transformation trüge und also die Transposition neuerdings Z_6 giebt. Man *muss* sogar andererseits nicht nur die Z_6, sondern gleichzeitig die Z_5 betrachten, denn für einen Index > 3 wäre es möglich, dass alle Doppelpunkte der Transformation auf Z_6 gelegen wären, sodass die Reduction der quadratischen Transformation auf die lineare und der Z_6 auf die Z_5 stets gleichzeitig einträten.

XXXIV. Theorem. *Um die Typen periodischer Transformationen zu finden, muss man die ebenen Collineationen suchen, welche eine Curve Z_6 mit zwei unendlich nahen dreifachen Punkten RR' und jene, welche eine Curve Z_5 mit zwei unendlich nahen Doppelpunkten reproduciren.*

6. Ich wende also das 4. Mal die Methode der canonischen Formen der Collineationen an, u. zw. auf die algebraische Form

$$Z_6 = x_1^3x_3^3 + x_1^2(x_2^3x_3 + x_2^2x_3^2 + x_2x_3^3 + x_3^4) + x_1(x_2^4x_3 + x_2^3x_3^2 + x_2^2x_3^3 + x_2x_3^4 + x_3^5)$$
$$+ x_2^6 + x_2^5x_3 + x_2^4x_3^2 + x_2^3x_3^3 + x_2^2x_3^4 + x_2x_3^5 + x_3^6 = 0.$$

XXXV. Theorem. *Wenn in Folge der linearen Substitution Z_6 oder Z_5 einen ferneren Doppelpunkt oder in R einen vierfachen Punkt annehmen oder sich zerlegen würde, dient die Form nicht mehr zur Bestimmung einer typischen Transformation mit 8 Punkten.*

Beweis. In diesem Falle knüpft sich die birationale Transformation an ein Büschel $a_1 \ldots a_8$, dessen D_9 zerlegt ist. Dies hat nur statt für particuläre Lagen dieser Punkte, welche immer erlauben, die Transformation in eine andere zu übertragen, welche einen oder mehrere der Punkte a_i als gewöhnliche Doppelpunkte hat.

Es muss jedoch bemerkt werden, dass man mittelst der D_9 alle Typen, auch jene mit 6 und 7 Punkten herleiten kann. Aber hiezu muss man der Zerlegungen und der Verminderungen des Geschlechtes Rechnung tragen. Denn es existiren Typen, wo man nicht 1, 2 oder 3 unter einander transformirte Punkte hinzufügen kann und von solcher Lage, dass die zu den 8 Punkten gehörige Curve sich nicht zerlege. Diesen Typen entsprechen dann die degenerirten Fälle, welche also in der folgenden Übersicht Platz finden müssten.

1. $x_1 : -x_2 : -x_3 \ldots . x_1^3\varphi_3 + x_1\varphi_5 \| x_1^2\varphi_4 + \varphi_6 \|.$

2. $x_1 : \quad x_2 : -x_3 \ldots . x_1^3x_3^3 + x_1^2(x_2^3x_3 + x_2x_3^3) + x_1(x_2^4x_3 + x_2^2x_3^3 + x_3^5)$
$+ x_2^5x_3 + x_2^3x_3^3 + x_2x_3^5 \| \ldots$

3. $x_1 : -x_2 : \quad x_3 \ldots . X_1^3X_3^3 + X_1^2(X_2^2X_3^2 + X_3^4) + X_1(X_2^4X_3 + X_2^2X_3^3 + X_3^5)$
$+ X_2^6 + X_2^4X_3^2 + X_2^2X_3^4 + X_3^6 \| \ldots$

4. $x_1 : \quad \varepsilon x_2 : \quad \varepsilon x_3 \ldots . X_1^3X_3^3 + X_2^6 + X_2^5X_3 + X_2^4X_3^2 + X_2^3X_3^3 + X_2^2X_3^4$
$+ X_2X_3^5 + X_3^6 \| \ldots$

5. $x_1 : \quad x_2 : \quad \varepsilon x_3 \ldots . X_1^3X_3^3 + X_1^2X_2X_3^3 + X_1X_2^2X_3^3 + X_2^6 + X_2^3X_3^3 + X_3^6 \| \ldots$

6. $x_1 : \quad \varepsilon x_2 : \quad x_3 \ldots . X_1^3X_3^3 + X_1^2X_2^3X_3 + X_1X_2^3X_3^2 + X_1X_3^5 + X_2^6$
$+ X_2^3X_3^3 + X_3^6 \| \ldots$

7. $x_1 : \quad \varepsilon x_2 : \quad \varepsilon^2 x_3 \ldots . X_1^3X_3^3 + X_1^2X_2^2X_3^2 + X_1(X_2^4X_3 + X_2X_3^4) + X_2^6$
$+ X_2^3X_3^3 + X_3^6 \| \ldots$

8. $x_1 : \quad ix_2 : \quad x_3 \ldots . x_1^3x_3^3 + x_1^2x_3^4 + x_1x_3^5 + x_3^6 + x_1x_2^4x_3 + x_2^4x_3^2 \| \ldots$

9. $x_1 : \quad x_2 : \quad ix_3 \ldots . x_1^3x_3^3 + x_1^2x_2x_3^3 + x_1x_2^2x_3^3 + x_2^3x_3^3 + x_1x_2^3x_3^2 \| \ldots$

10. $x_1 : -x_2 : \quad ix_3 \ldots . x_1^3x_3^3 + x_1^2x_2^3x_3 + x_1x_2^2x_3^3 + x_2^5x_3 + x_2x_3^5 \| \ldots$

11. $x_1 : \quad ix_2 : -ix_3 \ldots . x_1^3x_3^3 + x_1^3x_2^2x_3 + x_1x_2^3x_3^2 + x_1x_2x_3^4 + x_1x_3^5 \| \ldots$

12. $x_1 : \quad ix_2 : -x_3 \ldots . X_1^3X_3^3 + X_1X_3^5 + X_1^2X_2^2X_3^2 + X_2^2X_3^4 + X_2^6 \| \ldots$

13. $x_1 : -ix_2 : \quad ix_3 \ldots . x_1^3x_3^3 + x_1(x_2^3x_3^2 + x_2x_3^4) \| \ldots$

14. $x_1 : \quad \varepsilon x_2 : \quad \varepsilon^2 x_3 \ldots . X_1^3X_3^3 + X_1^2X_2^2X_3^2 + X_1X_2^4X_3 + X_2X_3^5 + X_2^6 \| \ldots$ $\varepsilon^7 = 1.$

15. $x_1 : \quad \varepsilon x_2 : \quad \varepsilon^3 x_3 \ldots . x_1^3x_3^3 + x_2^2x_3^4 \| \ldots$ $\varepsilon^5 = 1.$

16. $x_1 : \quad \varepsilon x_2 : \quad \varepsilon^4 x_3 \ldots . x_1^3x_3^3 + x_1^2x_2^3x_3 + x_2^4x_3^2 \| \ldots$ $\varepsilon^5 = 1.$

17. $x_1 : \quad \varepsilon x_2 : \quad x_3 \ldots . x_1^3x_3^3 + x_1^2x_3^4 + x_1x_3^5 + x_2^5x_3 + x_3^6 \| \ldots$

18. $x_1 : \quad x_2 : \quad \varepsilon x_3 \ldots . x_1^3x_3^3 + x_1^2x_2x_3^3 + x_1x_2^2x_3 + x_2^3x_3^3 \| \ldots$

19. $x_1 : \quad x_2 : -\varepsilon x_3 \ldots . x_1^3x_3^3 + x_1^2x_2x_3^3 + x_1x_2^2x_3^3 + x_2^3x_3^3 \| \ldots$ $\varepsilon^3 = 1.$

20. $x_1 : -\varepsilon x_2 : \quad \varepsilon x_3 \ldots . X_1^3X_3^3 + X_2^6 + X_2^4X_3^2 + X_2^2X_3^4 + X_3^6 \| \ldots$ $\varepsilon^3 = 1.$

21. $x_1 : -\varepsilon x_2 : \quad \varepsilon^2 x_3 \ldots . X_1^3X_3^3 + X_2^6 + X_1X_2^4X_3 + X_1^2X_2^2X_3^2 + X_3^6 \| \ldots$ $\varepsilon^3 = 1.$

22. $x_1 : -\varepsilon x_2 : \quad x_3 \ldots . X_1^3X_3^3 + X_1X_3^5 + X_2^6 \| \ldots$ $\varepsilon^3 = 1.$

23. $x_1 : \quad \varepsilon x_2 : -\varepsilon x_3 \ldots . x_1^3x_3^3 + x_2^5x_3 + x_2^3x_3^3 + x_2x_3^5 \| \ldots$ $\varepsilon^3 = 1.$

24. $x_1 : \quad \varepsilon x_2 : -\varepsilon^2 x_3 \ldots . x_1^3x_3^3 + x_1x_2^4x_3 + x_2^3x_3^3 \| \ldots$ $\varepsilon^3 = 1.$

25. $x_1 : -x_2 : \quad \varepsilon x_3 \ldots . X_1^3X_3^3 + X_2^6 + X_1X_2^2X_3^3 + X_3^6 \| \ldots$ $\varepsilon^3 = 1.$

26. $x_1 : \quad \varepsilon x_2 : \quad \varepsilon^i x_3 \ldots .$ gibt keine irreductible Form. $\varepsilon^7 = 1.$

27. $x_1 : \quad ix_2 : \quad \sqrt{i}\, x_3 \ldots .$ sowie alle mit dem Index 8 liefern reductible Formen.

28. $x_1 : \quad \varepsilon^i x_2 : \quad \varepsilon^k x_3 \ldots .$ gibt keine irreductible Form. $\varepsilon^9 = 1.$

29. $x_1 : -\varepsilon x_2 : \quad \varepsilon^2 x_3 \ldots . x_1^3x_3^3 + x_1^2x_2^2x_3^2 + x_1x_2^4x_3 + x_2^6 \| \ldots$ $\varepsilon^5 = 1.$

30. $x_1 : \quad i\varepsilon x_2 : -x_3 \ldots . X_1^3X_3^3 + X_2^6 + X_1X_3^5 \| \ldots$ $i^2 = -1, \quad \varepsilon^3 = 1.$

31. $x_1 : \quad \varepsilon\eta x_2 : \quad \varepsilon\eta^2 x_3 \ldots . X_1^3X_3^3 + X_2^6 + X_2X_3^5 \ldots$ $\varepsilon^3 = 1, \quad \eta^5 = 1.$

Invariante Z_5, welche in Betracht zu ziehen sind, finden sich 5, welche

ich gleich an die hier folgende Übersicht als 14—18 anschliesse. So entstehen also die folgenden Formen Z_6, Z_5 mit Correspondenzen:

1. $X_1^3X_3^3 + X_1^2(X_2^2X_3^2 + X_3^4) + X_1(X_2^4X_3 + X_2^2X_3^3 + X_3^5) + X_2^6 + X_2^4X_3^2$
$+ X_2^2X_3^4 + X_3^6.$ $\qquad x_1 : -x_2 : \ x_3.$

2. $X_1^3X_3^3 + X_2^6 + X_2^5X_3 + X_2^4X_3^2 + X_2^3X_3^3 + X_2^2X_3^4$
$+ X_2X_3^5 + X_3^6.$ $\qquad x_1 : \ \varepsilon x_2 : \ \varepsilon x_3.$

3. $X_1^3X_3^3 + X_1^2X_2X_3^3 + X_1X_2^2X_3^3 + X_2^6 + X_2^3X_3^3 + X_3^6.$ $\qquad x_1 : \ x_2 : \ \varepsilon x_3.$

4. $X_1^3X_3^3 + X_1^2X_2^3X_3 + X_1X_2^3X_3^2 + X_1X_3^5 + X_2^6 + X_2^3X_3^3 + X_3^6.$ $\qquad x_1 : \ \varepsilon^2x_2 : \ \varepsilon x_3.$

5. $X_1^3X_3^3 + X_1^2X_2^2X_3^2 + X_1(X_2^4X_3 + X_2X_3^4) + X_2^6$
$+ X_2^3X_3^3 + X_3^6$ $\qquad x_1 : \ \varepsilon x_2 : \ \varepsilon^2x_3.$

6. $X_1^3X_3^3 + X_1X_3^5 + X_1^2X_2^2X_3^2 + X_2^2X_3^4 + X_2^6.$ $\qquad x_1 : \ ix_2 : -x_3.$

7. $X_1^3X_3^4 + X_1^2X_2^2X_3^2 + X_1X_2^4X_3 + X_2X_3^5 + X_2^6.$ $\qquad \eta^5 = 1, \qquad x_1 : \ \eta x_2 : \ \eta^2x_3.$

8. $X_1^3X_3^3 + X_2^6 + X_2^4X_3^2 + X_2^2X_3^4 + X_3^6.$ $\qquad x_1 : -\varepsilon x_2 : \ \varepsilon x_3.$

9. $X_1^3X_1^3 + X_2^6 + X_1X_2^4X_3 + X_1^2X_2^2X_3^2 + X_3^6.$ $\qquad x_1 : -\varepsilon x_2 : \ \varepsilon^2x_3.$

10. $X_1^3X_3^4 + X_2^6 + X_1X_3^5.$ $\qquad x_1 : -\varepsilon x_2 : \ x_3.$

11. $X_1^3X_3^3 + X_2^6 + X_1X_2^2X_3^3 + X_3^6.$ $\qquad x_1 : -x_2 : \ \varepsilon x_3.$

12. $X_1^3X_3^3 + X_2^6 + X_1X_3^5.$ $\qquad x_1 : \ i\varepsilon x_2 : -x_3.$

13. $X_1^3X_3^3 + X_2^6 + X_2X_3^5.$ $\qquad \eta^5 = 1, \qquad x_1 : \ \varepsilon\eta x_2 : \ \eta x_3.$

14. $X_1^3X_3^2 + X_1X_2^2X_3^2 + X_2^5 + X_2X_3^4.$ $\qquad x_1 : -x_2 : \ ix_3.$

15. $X_1^3X_3^2 + X_1^2X_3^3 + X_1X_3^4 + X_2^4X_1 + X_2^4X_3.$ $\qquad x_1 : \ ix_2 : \ x_3.$

16. $X_1^3X_3^2 + X_2^5 + X_3^4X_2.$ $\qquad x_1 : -\varepsilon x_2 : \ i\varepsilon x_3.$

17. $X_1^3X_3^2 + X_2^5 + X_1^2X_3^3 + X_1X_3^4.$ $\qquad \eta^5 = 1. \qquad x_1 : \ \eta x_2 : \ x_3.$

18. $X_1^3X_3^2 + X_2^5 + X_1X_3^4.$ $\qquad x_1 : \ \varepsilon x_2 : -x_3.$

Um aus diesen Formen die Transformationen zu erschliessen, welche einem Büschel angehören, dessen D_9 die hier definirte Correspondenz trägt,

kann man so vorgehen, dass man die dreifach berührenden Kegelschnitte rechnet, unter ihnen ein unabhängiges Octtupel wählt und die Vertauschung dieser Kegelschnitte durch die oben erwähnte lineare Transformation verfolgt. Statt der Rechnung bediene ich mich einiger Merkmale, welche über die Identität mit den l. c. gefundenen Typen entscheiden; namentlich: wenn eine der unveränderlichen Geraden durch $R\ x_2^6$ liefert, bezeichnet dies eine C_3^3, wenn $x_1^3 + x_2^3$, bezeichnet dies eine C_r.

Hier bietet sich jedoch eine wesentliche Schwierigkeit, welche bei 7 Punkten nicht vorhanden war. Es existirt immer eine Transformation mit den 8 Punkten a_1, welche als Index das Doppelte des Indexes der Correspondenz V in D_9 hat. Diese Transformation ist nicht immer die Zusammensetzung von Σ_2 mit einer Transformation, welche denselben Index wie V hat. Dies hat nur dann statt, wenn der letztere Index ungerade ist. Ich erhalte also die folgende Vertheilung der Formen 1° bis 18° auf die Typen.

XXXVI. Theorem. *Die Curven D_9, welche in eindeutiger Beziehung auf die Curven Z: 1 — 6, 8 — 13, 16 — 17 eindeutige Correspondenzen tragen, liefern mit ihren 8 dreifachen Punkten auf die in Theorem XXX beschriebene Art periodische birationale Transformationen, welche respective äquivalent sind den folgenden Typen: I_4; N_3 und E_6; Δ_3 und E_6; Collineation und E_6''; Δ_8; H_9 und H_6; B_6 mit zwei Doppelpunkten und H_6^1; B_{24}; B_{15} und B_{30}; E_4 und Transformation von Jonquières; Z_5 und Γ_{10}; B_{20}.*

Es ist hieraus ersichtlich, dass man die Formen 3. und 4., 7. und 17., 12. und 16. als äquivalent betrachten muss, u. zw. auf Grund des oben zum Theorem XXXIV hervorgehobenen Umstandes. Es ist nämlich in diesen Fällen ein in sich transformirtes Büschel von Kegelschnitten vorhanden, welches durch die Transposition in ein in sich transformirtes Geradenbüschel verwandelt wird, wodurch eine Collineation mit anderen Doppelverhältnissen erscheinen kann.

Conclusion. *Die isolirten typischen Transformationen, welche in der Ebene construirt werden können, sind die folgenden:*

$$B_6,\ B_9,\ B_{12},\ \Delta_3,\ \Gamma_6,\ B_{12}',\ B_{14},\ B_{18},\ \Gamma_6',\ \Gamma_6'',\ \Delta_6,\ E_4,\ \theta_2,\ B_{15},\ B_{20},\ B_{24},$$

$$B_{30},\ \Gamma_{10},\ \Gamma_{12},\ \Delta_8,\ E_6,\ E_6',\ E_6'',\ Z_5,\ H_6,\ H_6^1,\ I_4,\ N_3,\ \Sigma_2.$$

§ 4. *Eine Abänderung der vorhergehenden Methode.*

In den in § 3 discutirten Collineationen war stets eine Doppelgerade vorhanden, welche das Bild einer $C_6(a_1^2 \ldots a_8^2)$ ist. Die Collineation, welche ∞^1 Doppelpunkte in dieser Geraden hat, kann keinen Index > 3 haben und die birationalen Transformationen werden ein Büschel anallagmatischer C_3 besitzen, sind also N_3 und E_6. Abgesehen von dieser E_6 wird es hinreichen, eine Curve $D_6(a_1^2 \ldots a_8^2)$ mit eindeutiger Correspondenz zu untersuchen. Durch diese Correspondenz ist die birationale Transformation der Ebene bestimmt, indem durch sie die Projectivität unter den C_3 und die Correspondenz unter den Punkten zweier successiven C_3 geleitet wird. Demnach:

XXXVII. Theorem. *Alle periodischen Transformationen mit 8 Punkten sind durch eine invariante Curve C_6 mit 8 Doppelpunkten bestimmt.*

Indem man C_6 mittelst der C_3 durch 7 der Punkte a überträgt, erhält man eine C_4 mit Doppelpunkt, wobei die birationale Transformation nicht mehr in eine birationale Transformation übertragen wird. Jedoch kann man sagen: Jede Correspondenz in einer C_4 mit Doppelpunkt ist in einer ebenen birationalen Transformation enthalten.

§ 5. *Andere Methode für die Ableitung typischer Transformationen mit 7 oder 8 Punkten.*

Wenn man einen Typus mit 6 Punkten kennt, welcher einen Doppelpunkt d_1 besitzt oder einen Typus mit 5 Punkten, welcher zwei Doppelpunkte oder ein involutorisches Paar besitzt und man eine Transformation θ_2 mit $a_1 \ldots a_6, d_1$ oder $a_1 \ldots a_5, i_1 i_2$ anwendet, erhält man eine typische Transformation mit 7 Punkten. Ein Beispiel war im § 2: B_6 und d_1 gibt mit θ_2 die Δ_6.

Wenn man einen Typus mit 7 Punkten kennt, welcher einen Doppelpunkt d_1 besitzt oder einen Typus mit 6 Punkten, welcher zwei Doppelpunkte oder ein involutorisches Paar besitzt oder mit 5, welcher drei Doppelpunkte oder ein involutorisches Paar und einen Doppelpunkt oder

ein cyclisches Tripel besitzt, und man eine Involution Σ_2 mit diesen 8 Fundamentalpunkten anwenden kann, wird die Zusammensetzung eine Transformation eines neuen Typus sein.

In der Anwendung muss man darauf achten, dass die neuen Punkte keine particulären Lagen haben, damit die Transformation θ_2 oder Σ_2 sich nicht zerlege. Wenn z. B. d_1 der Doppelpunkt einer $C_3(a_1 \ldots a_7)$ ist, wird Σ_2 $(a_1 \ldots a_7, d_1)$ sich zerlegen, weshalb man also Σ_2 nicht an B_{14} anwenden kann.[1] Da die Typen mit 7 Punkten mit aller Sicherheit gefunden sind, bleibt nur Σ_2 anzuwenden. Es ist hiezu nöthig:

XXXVIII. Theorem. *Σ_2 ist mit jeder Transformation vertauschbar, welche alle Charakteristikpunkte unter den 8 Punkten von Σ_2 hat.*

Beweis. Diese letztere transponirt das C_3 Büschel in sich selbst, also a_9, aber auch die Involutionen $u' + u \equiv \gamma$ in Involutionen $u' + u \equiv \gamma$ und ihre Doppelpunkte in Doppelpunkte, also alle Involutionen des Büschels in sich, daher Σ_2 in sich.

1. B_{12} mit einem involutorischen Paare liefert mit Σ_2 eine zu B'_{12} mit einem Doppelpunkte äquivalente Transformation.

2. Γ''_6 mit Doppelpunkt liefert mit Σ_2 eine zu (ab'), $(a'b)$, c' in c nebst cyclischem Tripel äquivalente Transformation, was sich widerspricht.

3. Γ_6 und involutorisches Paar liefert mit Σ_2 Äquivalenz zur Collineation und die 8 Punkte müssten in dieser Collineation ein Cyclus und 2 Doppelpunkte sein. In der That findet sich l. c. p. 225, dass das involutorische Paar conconisch mit 4 Punkten von Γ_6 ist.

4. Δ_6 mit Doppelpunkt liefert mit Σ_2 Äquivalenz zu B_6 mit involutorischem Paare, was sehr interessant ist, da auch B_6 und d_1 mit θ_2 die Δ_6 liefert.

5. E_4 und Doppelpunkt liefert mit Σ_2 Äquivalenz zu (cc'), a' in b, b' in c nebst Doppelpunkte und involutorischem Paare.

[1] Diese Thatsache erweist sich öfters als identisch damit, dass man in einer periodischen Transformation des Indexes i einen Cyclus voraussetzt, dessen Index kein Divisor von i ist. So z. B. wenn man zu Γ''_6 einen Doppelpunkt hinzunimmt, kann die Zusammensetzung mit Σ_2 in Δ_3 nebst einem involutorischen Paare übertragen werden, was sich widerspricht. Das rührt davon her, dass die Doppelpunkte von Γ''_6 theils Spitzen von C_3^3, theils mit 2 Characteristikpunkten alineirt sind.

6. (ab'), (bc'), a' in a'_1 in c mit d_1, d_2 liefert durch Zusammensetzung mit θ_2 eine Transformation, welche äquivalent ist zu (ab'), (bc'), a' in a'_1 in c mit $i_1 i_2$.

7. H_6 mit Σ_2 liefert wieder eine zu H_6 äquivalente Transformation, wie man rasch mit Hilfe der Invarianz von $m - \nu$ (Cf. Crelles J., Bd. 114, p. 68) entscheidet.

8. B_6 und zwei Doppelpunkte liefert mit Σ_2 eine zu H_6^1 äquivalente Transformation, welche also existirt.[1]

Anmerkung. Man kann die Anzahl der Typen vermindern, indem man nicht als Typen betrachtet: 1. Die Zusammensetzungen zweier vertauschbarer Typen, sodass nur übrig bleiben B_9, Δ_8, Z_5, E_4, I_4, N_3, Δ_3, Σ_2, θ_2, die Collineationen und die Jonquièreschen Transformationen des Indexes 2^a. 2. Die durch Coordination der Cyklen eines anderen Typus entstehenden Typen, sodass nur übrig bleiben Z_5, N_3, Δ_3, Σ_2, θ_2, die Collineationen und die involutorischen Typen von Jonquières. Man kann diese die Architypen nennen.

§ 6. *Die zweideutige Abbildung des quadratischen Kegels.*

Der Methode des § 3 kann ein anderer Ausdruck gegeben werden. Die in R die Z_6 berührenden Kegelschnitte bilden ein ∞^3 System und man kann sie durch die Ebenen eines linearen R_3 darstellen. Dann liefern die Geraden durch R die Geraden eines Kegels, dessen Scheitel das Bild der Tangente RR' ist. Die dreifach berührenden Kegelschnitte haben als Bilder dreifach berührende Ebenen einer Curve ρ_6 auf dem Kegel und die quadratischen Transformationen des Theorems XXXIII sind durch die Collineationen in R_3 dargestellt, welche den Kegel und die ρ_6 reproduciren und man kann sie durch stereographische Projection des Kegels erhalten. Umgekehrt:

XXXIX. Theorem. *Die Collineationen des R_3, welche den quadratischen Kegel und gleichzeitig eine cubische Fläche reproduciren, liefern durch die*

[1] Die Begründung, welche ich in der Preisschrift gegeben, und Crelles J., Bd. 114, p. 105 n. 5 reproducirt habe, ist bis zum Schlusse richtig, wo aber eben die Verträglichkeit der gefundenen Bedingungen, also die Existenz von XL_6 gefolgert werden muss.

zweideutige Abbildung des Kegels die typischen Transformationen mit 8 Punkten oder auch alle isolirten typischen Transformationen.

Wir haben also bereits drei algebraische Gebilde, welche durch ihre Correspondenzen zu den ebenen periodischen Transformationen führen: Die Curve C_6, die C_4 mit Doppelpunkt, der quadratische Kegel zusammen mit einer cubischen Fläche.

§ 7. *Die unicursalen Flächen, welche in einer Collineation des Raumes invariant sind.*

1. Die Methode des § 1 gestattet die folgende Verallgemeinerung. Wenn eine Collineation des Raumes eine Fläche reproducirt, welche eindeutig auf eine Ebene abbildbar ist und man die in der Fläche enthaltene Vertauschung auf die Ebene abbildet, erhält man eine birationale Transformation u. zw. eine periodische, wenn die Collineation periodisch ist. Umgekehrt:

XL. Theorem. *Jede periodische birationale Transformation kann als Bild einer collinearen Umwandlung auf einer Fläche betrachtet werden, welche in einem Raume R_r enthalten ist.*[1]

Beweis. Man kann arithmetisch und geometrisch beweisen, dass jede periodische Transformation ein lineares System von Curven mit demselben Periodicitätsindex reproducirt, dessen Dimension willkürlich gross gemacht werden kann. Dieses System dient zur Abbildung der Fläche des Theoremes. Ebenso:

XLI. Theorem. *Jede periodische birationale Transformation des R_i kann als Bild einer collinearen Umwandlung unter den Punkten einer Mannigfaltigkeit M_i^k (i Dimensionen, Ordnung k) in einem Raume R_r erhalten werden.*

XLII. Theorem. *Wenn verschiedene Abbildungsarten einer Mannigfaltigkeit M_i^k verschiedene Transformationen liefern, sind letztere unter einander*

[1] Es gibt zwei Corollare dieses Theoremes: I. Ein Cyclus einer periodischen Transformation des R_r ist stets die Projection eines collinearen Cyclus in einem noch höheren Raume. II. Die Cyclen in $u' - u \equiv \gamma$ einer elliptischen Curve sind stets die Projectionen collinearer Cyclen eines höheren Raumes.

birational äquivalent und die Transposition wird nach der Methode von Sturm erhalten.[1]

Beweis. Jedes Punktepaar von T_1 entspricht algebraisch einem Punktepaare in M_i^k und dieses einem Paare der zweiten Transformation T_2. Unter T_1 und T_2 besteht also eindeutige Beziehung und sie ist auch eindeutige Transformation unter den zwei Trägern R_i, indem diese als Zusammensetzung der 1. Abbildung von M_i^k mit der 2. Abbildung des R_i auf den M_i^k erscheint.

2. Wenn man für R_r eine Form in $x_1 \ldots x_{r+1}$ kennt, welche eindeutig auf einen R_{r-1} unabhängig von der Natur der Coefficienten abbildbar ist, wie im R_3 die cubischen quaternären Formen, so kann man sehr leicht die Methode der canonischen Formen der Collineationen anwenden, um die M_{r-1} auszulesen, welche durch eine Collineation reproducirt werden, und hiemit birationale Transformationen im R_{r-1} zu finden.[2] Als Beispiel diene:

XLIII. Theorem. *Die Schnittmannigfaltigkeit von zwei M_{r-1}^2 im R_r ist eindeutig abbildbar auf einen linearen R_{r-2}, wenn $r > 3$.*

Beweis. Ich bediene mich der eindeutigen Abbildung einer der zwei M_{r-1}^2 und construire die Bilder der Schnitte mit den anderen M_{r-1}^2 des R_r. Diese $M_{r-2}^{2.2}$ mit Doppel M_{r-3}^2 sind abbildbar, was man beweist, indem man ein Fundamentaltheorem von Nöther über die Flächen, welche Schaaren rationaler Curven enthalten, auf M_i verallgemeinert. Ebenso kann man die folgenden Theoreme beweisen:

Der Schnitt von drei M_{r-1}^2 im R_r ist eindeutig abbildbar auf eine Ebene (und gestattet also die Anwendung der Methode der canonischen Collineationen), wenn $r > 5$.

Von einem gewissen Minimalwerthe von r angefangen ist der Schnitt von k M_{r-1}^2 im R_r eindeutig auf einen R_{r-k} abbildbar. Bis zu einem gewissen Maximum von r ist der Schnitt von $r-k$ M_{r-1}^2 des R_r abbildbar.

XLIV. Theorem. *Die Typen mit 7 Punkten sind die Bilder von collinearen Umwandlungen auf Flächen 8. O. des linearen Raumes R_6.*

[1] Dies gilt auch für mehrdeutige Transformationen in M_i^k.

[2] Dies gilt auch noch für M_i im $R_{i+\lambda}$.

Beweis. Die Curven $C_6(a_1^2 \dots a_7^2)$ schneiden sich gegenseitig in 8 Punkten und haben die Dimension 6; sie dienen zur Abbildung der genannten Fläche.

XLV. Theorem. *Die Typen mit 8 Punkten sind die Bilder von collinearen Umwandlungen auf Flächen 9. O. des* R_6.

Beweis. Die Curven $C_9(a_1^3 \dots a_8^3)$ schneiden sich gegenseitig in 9 Punkten und haben die Dimension 6, etc.

XLVI. Theorem. *Jede Collineation des* R_3, *welche eine abbildbare* M_2^n *reproducirt, reproducirt auch eine cubische Fläche oder eine Fläche 6. O. oder eine* M_2^n *mit* $(n-2)$*-facher Geraden, falls das Abbildungssystem nicht ein vollständiges aus* $x_1^i x_2^k x_3^l$ *linear zusammengesetztes ist.*

Beweis. Dies ist ein anderer Ausdruck des Äquivalenztheoremes. Denn die Collineation des R_3 ist durch die Punktsysteme in der M_2 individualisirt, woraus folgt, dass wenn eine ebene Transformation gleichzeitig zwei verschiedene Curvensysteme reproducirt und man beide Systeme zur Construction von zwei Collineationen im R_3 verwendet, diese zwei Collineationen dieselben sein müssen.

3. Ein wichtiger Fall sind die Formen 2. Grades. Hat man im R_r eine M_{r-1}^2 mit einer Hermiteschen Substitution, so kann man eine stereographische Projection auf den R_{r-1} machen, um eine quadratische Transformation zu erhalten, deren M_{r-3}^2 coincidiren, während die Scheitel S', S verkettet sind.[1] Für ungerades r hat man gemäss der Determinante $+1$ oder -1 zwei Arten von quadratishen Transformationen, indem jedesmal die Kegel SC, $S'C'$ in Collineation sind, aber in der einen Art die $R_{\frac{r-1}{2}}$ jedes Systemes von C den $R_{\frac{r+1}{2}}$ durch S' entsprechen, welche C im selben Systeme schneiden, in der anderen Art den $R_{\frac{r+1}{2}}$ durch S', welche C im anderen Systeme schneiden. Die stereographische Projection liefert eine particuläre Transformation, wenn M_{r-1}^2 singulär ist. Hat sie einen Doppel-R_i, so hat auch die fundamentale M_{r-3}^2 einen Doppel-R_i und jede Gerade, welche diesen R_i schneidet, ist in eine Gerade verwandelt, welche

[1] Cf. meine Note in den Rendiconti des R. Ist. Lomb. 8. November 1894 *Sopra le trasformationi quadratiche periodiche nello spaziö a r dimensioni.*

den Doppel-R_i des anderen R_r schneidet. Wenn M_{r-1}^2 einen Doppel-R_{r-4} hat, so zerlegt sich M_{r-3}^2. Wenn M_{r-1}^2 einen Doppel-R_{r-3} hat, so ist M_{r-3}^2 ein doppelgezählter R_{r-3}. Das homaloïdale System besteht dann in ∞^{r-1} Hyper-$(r-2)$ Kegeln, welche den R_{r-3} als gemeinsamen Berührungsraum haben. Wenn der Transformirte des stereographischen Centrums mit dem Doppelraume des Kegels M_{r-1}^2 in einem erzeugenden Raume ist, so ist das Centrum S der quadratischen Transformation unendlich nahe an M_{r-3}^2.

5. Die bekannte Clebschische Abbildungsart der F_3 durch windschiefe Projection ist zu verallgemeinern auf ein ∞^2 lineares System windschiefer Curven, welche die Fläche und die Ebene in einem variabeln Punkte treffen, was bereits Herr Sturm angebahnt hat.

XLVII. Theorem. *Jede homaloïdale Fläche gestattet die Abbildung auf eine Ebene mittelst einer windschiefen Projection durch Raumcurven eines ∞^2 Systemes.* (Cf. § 13. n. 3.)

Der Beweis wird wie folgt geführt werden können. Die Fläche ist die Projection einer gewissen Normalfläche, welche ich mir nebst der Ebene im selben R_r denke. Dann gibt es zwar i. A. keinen R_3, welcher beide enthält, wohl aber eine M_3, welche monoïdal ist und beide enthält. Diese Mannigfaltigkeit wird durch die projicirenden Cliffordschen Räume in Raumcurven eines Systemes getroffen wie jenes, von welchem das Theorem spricht. Ich verhehle nicht, dass dieser Beweis den Unterschied zwischen homaloïdaler und abbildbarer Fläche nicht ins rechte Licht stellt.

6. Das Theorem XLI. tritt an die Seite einer Methode von Sturm und gibt Anlass zu einigen Betrachtungen, welche ich nicht unterdrücken will. Sturm bedient sich zweier windschiefer Projectionen derselben F_3 auf zwei Ebenen, um unter diesen eine birationale Transformation zu erzielen. Für die periodischen Transformationen kann man an eine Anwendung dieser Methode nicht denken. Ich will aber beiden Methoden einen gemeinsamen Ausspruch geben, indem ich sie verallgemeinere: Man transformirt eine abbildbare M_i^n in eine andere $M_i^{n'}$ durch eine wenn auch nur einfach rationale Transformation der umgebenden Räume und bildet beide M_i auf zwei R_i ab. Diese zwei R_i werden so durch eine

birationale Transformation verknüpft sein. Lässt man die M_i und die R_i je zusammenfallen, so erhält man die zwei Methoden, je nachdem man die Systeme auf M_i identisch macht, die beiden Abbildungsarten aber verschieden lässt, oder die beiden Abbildungsarten identisch macht, aber die beiden Systeme auf M_i verschieden lässt. Ein Übergang wäre also, beides verschieden anzunehmen.

7. Ein wesentlicher Fortschritt erscheint dann, wenn man beide Abbildungen als Theile einer Transformation denkt, welche den ganzen umgebenden linearen Raum beherrscht, insofern dies möglich ist. Eine Transformation Q_1 führt R_i in eine M_i^n, eine Q_2 M_2^n in $M_i^{n'}$ und Q_3 die $M_i^{n'}$ in R_i'. Das Resultat $Q_1 Q_2 Q_3$ ist die birationale Transformation $R_i R_i'$, welche aber nun in einer Transformation zwischen zwei R_r enthalten ist. Um das Verfahren von Veronese, welches eine nicht ganz vollendete Verallgemeinerung der Methode von Sturm auf R_r ist, als speciellen Fall hievon zu erhalten, hat man die Projection durch eine birationale Transformation der zwei Räume zu definiren, welche M_i^n und den R_i umgeben, in welchen projicirt wird.

XLVIII. Theorem. *Man kann jede centrale Projection einer M_i^n in R_r auf einen R_i als Bestandtheil einer birationalen Transformation des ganzen Raumes definiren.*[1]

Beweis. Man kann in jedem projicirenden Raume die beiden Punkte als einander entsprechend in einer sogar nicht ganz bestimmten Collineation betrachten.

IL. Theorem. *Man kann jede windschiefe Projection einer M_i^n auf einen R_i, welche durch ein lineares System von M_{r-i}, welche M_i^n und R_i in je einem Punkte schneiden, geleitet wird, als in einer birationalen Transformation des ganzen Raumes R_r enthalten betrachten, gewiss in dem Falle, wo die M_{r-i} jede ∞^{r-i} eindeutige Correspondenzen gestatten.*

[1] Es ist nicht möglich, in der Ebene jede rationale Curve durch birationale Transformation der Ebene in jede andere zu verwandeln. Ebenso ist im R_3 nicht jede abbildbare Fläche und im R_r nicht jede abbildbare M_{r-1} homaloïdal. Aber mit Hilfe des obigen Satzes beweist man:

Irgend zwei eindeutig bezogene M_i haben die Correspondenz enthalten in einer eindeutigen Transformation zweier Räume R_r, wo r ein gewisses Minimum haben wird.

Hieraus folgt auch, dass wenn eine Transformationen ein invariantes Büschel von M_{r-1}^2 hat, sie birational übertragbar in eine andere ist, welche ein invariantes Büschel von R_{r-1} hat. Und das Theorem: Wenn eine Transformation ein lineares ∞^i System von M_{r-1}^2 mit einem gemeinsamen Punkte invariant lässt, ist sie birational übertragbar in eine andere, welche ein lineares ∞^i System von R_{r-i} invariant lässt.

§ 8. *Vereinfachung der vorigen Methode.*

Die vollständigen invarianten Curvensysteme werden i. A. nicht die Dimension 3 haben. Aber für eine effective und periodische Transformation gilt, dass die Collineation unter den ∞^i Curven eines Systemes immer auch ein invariantes ∞^3 System hervorruft. Also:

L. Theorem. *Jede periodische birationale Transformation kann als Bild einer collinearen Umwandlung unter den Punkten einer abbildbaren M_2^n des R_3 betrachtet werden.*

In den meisten Fällen reducirt sich gleichzeitig die Ordnung der M_2, was ich in zwei wichtigen Fällen nachweisen will.

1. Für 7 Punkte bilden die $C_6(a_1^2 \dots a_7^2)$ durch 3 invariante Punkte $d_1 d_2 d_3$ ein ∞^3 System und bilden eine M_2^5 mit $7 + 21 + 21 + 7 = 56$ Kegelschnitten ab. Die C_3 durch $a_1 \dots a_7$, $d_i d_k$ bilden drei gegen einen Punkt convergirende Doppelgeraden ab. Die Anwendung der Methoden von Clebsch und Nöther ist ohne Schwierigkeit. Es sind dann die Collineationen zu suchen, welche eine solche M_2^5 reproduciren. Man kann so das 5. Mal die Methode der canonischen Collineationen anwenden, indem man die M_2^5 unter der Form mit willkürlichen Coefficienten schreiben kann:

$$x_4^2 x_1 x_2 x_3 + x_4(x_2^2 x_1^2 + x_3^2 x_1^2 + x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_2 x_3 + x_2^2 x_1 x_3 + x_3^2 x_1 x_2) + x_1^2 x_2^2 x_3$$
$$+ x_2^2 x_3^2 x_1 + x_3^2 x_1^2 x_2 + x_1^3 x_3^2 + x_1^3 x_2^2 + x_2^3 x_1^2 + x_2^3 x_3^2 + x_3^3 x_1^2 + x_3^3 x_2^2 = 0.$$

2. Für 8 Punkte bilden die $C_9(a_1^3 \dots a_8^3)$, welche doppelt durch einen invarianten Punkt der Transformation gehen, eine M_2^5 des R_3 ab. Die C_3

durch $a_1 \ldots a_8$, d ist das Bild einer Doppelgeraden, welche vielmehr cuspidal ist, a_9 das Bild eines dreifachen biplanaren Punktes der Fläche, welche $8 + 28 + 56 + 56 + 56 + 28 + 8 = 240$ windschiefe C_3 enthält, die eine Configuration bilden, welche ein treues Abbild der von den Fundamentalcurven mit den 8 Punkten a gebildeten Configuration ist.

3. Die $C_9(a_1^3 \ldots a_8^3, d_1 d_2 d_3)$ bilden eine M_2^6 in R_3 ab und wenn man $d_1 d_2 d_3$ auf einer A_3 des Büschel nimmt, kann man noch einen Punkt d_4 hinzufügen, so dass die Fläche M_2^5 wird. A_3 ist Bild eines dreifachen uniplanaren Punktes, die C_3 durch d_4 Bild einer Doppelgeraden δ_4. Die osculirende Ebene in A schneidet M_2^5 in δ_4 und drei einfachen Geraden g_1, g_2, g_3 durch A. Wenn durch d_4^2 nicht ein Büschel von C_6 geht, so sind alle C_3 in Ebenen durch δ_4 inflectiv in A an δ_4 und der unendlich nahe Punkt ist das Bild von a_9. Die Gleichung der Fläche ist in diesem Falle

$$x_4^2 x_1^3 + x_4 x_2^2 x_3 \varphi_1(\overset{1}{x_2}, \overset{1}{x_3}) + x_2 x_1^3 \varphi_2(\overset{1}{x_1}, \overset{1}{x_2}, \overset{1}{x_3}) = 0,$$

sodass man ein 6. Mal die canonischen Collineationen anwenden kann.

§ 9. *Die Flächen M_2^n mit $(n-2)$-facher Geraden, welche durch eine Collineation reproducirt werden.*

Die Abbildung geschieht durch eine ∞^3 System von Curven $C_n\, a^{n-2}$ durch $3n-4$ einfache Punkte, eine $C_{n-1}\, a^{n-3}$ bildet die $(n-2)$-fache Gerade ab. Die Gleichung ist

$$(1) \quad x_3^2 \varphi^{n-2}(x_1, x_2) + x_1^2 \varphi_1^{n-2}(x_1, x_2) + x_1 x_3 \varphi_2^{n-2}(x_1, x_2) + x_1 x_4 \varphi_3^{n-2}(x_1, x_2) + x_4 \varphi_4^{n-2}(x_1, x_2) + \varphi_5^n(x_1, x_2) = 0.$$

Die Discriminante der Form in λ, nachdem $x_1 = \lambda x_2$ gesetzt wurde, liefert die Ebenen der zerlegten Kegelschnitte. Eine birationale Transformation, welche das ∞^3 System reproducirt, ist das Bild einer Collineation, welche M_2^n reproducirt und umgekehrt.

LI. Theorem. *Die typischen Transformationen mit (ab) sind Bilder von collinearen Umwandlungen eines Punktesystemes in M_2^n mit $(n-2)$-facher Geraden.*

Denn jede solche Transformation besitzt ein invariantes ∞^3 System von C_n a^{n-2}. Man kann also ein 7. Mal die Methode der canonischen Collineationen anwenden, welche die (1) reproduciren sollen.

2. Dass die Collineation periodisch sein muss, folgt daraus, dass die $3n-4$ Tangentenebenen unter einander transformirt sein müssen und ihre Berührungspunkte ersichtlich nicht in einer Geraden, aber auch wegen der Anzahl der Tangenten an die Schnittcurve von M_2^n mit dieser Ebene nicht in einer Ebene sein können.

Die Curve C_{n-1} a^{n-3} kann sich in m Geraden und eine Curve C_{n-m-1} a^{n-3-m} zerlegen, bis zu $m=n-4$. In diesem Falle hat die Fläche M_2^n eine $(n-2)$-fache Gerade mit m stationären Tangentenebenen und $n-m-2$ variabeln Tangentenebenen. In (1) werden φ_1 und φ_2 einen gemeinsamen Factor m Grades haben.

Ziehen wir endlich die Schlussfolgerung aus den §§ 1 und 4—9:

LII. Theorem. *Jede periodische birationale Transformation ist das Bild einer collinearen Umwandlung unter den Punkten einer Fläche* 3. *oder* 5. *O. oder n. O. mit* $(n-2)$*-facher Geraden im* R_3.

§ 10. *Die durch eine rationale Transformation des umgebenden Raumes invarianten abbildbaren Flächen.*

1. Unter den Punkten zweier abbildbarer Flächen oder unter den Punkten einer einzigen besteht eine Unendlichkeit eindeutiger Correspondenzen.

Sei L das Abbildungssystem von M_2^n und sei durch die ebene birationale Transformation, welche das Bild der Correspondenz auf M_2^n ist, L in ein System L_1 verwandelt, dem auf M_2^n ein System Λ entsprechen möge. Nach dem Restsatze sind die Curven von Λ corresidual und es existirt ein ∞^3 System von Flächen, welche die Λ als Restcurven ausschneiden und welche, geleitet durch die Correspondenz auf M_2^n, eine einfach rationale Transformation bestimmen, welche in M_2^n diese Correspondenz hervorruft. Wenn das Flächensystem in speciellen Fällen homaloïdal ist, so ist diese Transformation birational für den ganzen Raum.[1]

Diese Methode, Transformationen zu construiren, welche eine gegebene abbildbare Fläche reproduciren, ist ganz verschieden von jener, eine gegebene abbildbare Fläche in ein ∞^3 homaloïdales System einzureihen. Sie erstreckt sich auf *alle* Flächen, während diese nur die homaloïdalen trifft. Sie kann einerseits dienen, um die periodischen Transformationen des Raumes zu construiren und andererseits, um ebene periodische Transformationen zu entdecken. Das erste Verfahren existirte bereits in der Ebene, aber das zweite war ohne Werth, da das Resultat im binären Gebiete $p = 0$ kein anderes als die binären Projectivitäten sein konnte. Sogar die nicht abbildbaren M_i der R_r gestatten die Anwendung dieser Methode, sofern man nur die Geometrie ihrer Curven kennt. Ein Beispiel hat man in den C_3, cit. Abh. I. Theil.

2. Eine Anwendung der Methode im zweiten Sinne ist die folgende. Man kann Reciprokaltransformationen [2] finden, welche eine gegebene Fläche 2. Ordnung reproduciren, z. B. indem man mit F_2 eine C_4 ($p = 0$) 2. Art und dann mittelst der Methode des § 4 der Preisschrift eine Transformation construirt, welche C_4 reproducirt, und in Folge dessen auch F_2. Man kann auch eine Transformation construiren, welche C_4 ($p = 1$) reproducirt, und hiemit das Büschel von F_2 und also zwei dieser F_2, welche Kegel sein können.

Ebenso ist es möglich, Flächen F_4 mit Doppelgeraden zu construiren, welche invariant in einer Reciprocaltransformation sind. Sie müssen mindestens zwei Doppelpunkte besitzen. Eine Plückersche Complexfläche kann invariant sein in einer Reciprocaltransformation, welche in jedem Raume

---

[1] Dieselbe Methode lässt sich auch noch für M_{r-1} im R_r anwenden; indem ja der Restsatz auch für M_{r-1} gilt. Man kann sogar genau so vorgehen, um Transformationen zu finden, welche eine gegebene abbildbare M_i des R_r reproduciren. Für jede abbildbare M_{r-1} oder M_i wird man sich die Frage stellen müssen, welcher der niedrigste Rang einer Transformation sei, in welcher eine Correspondenz in M_{r-1} oder M_i als Bestandtheil enthalten sein kann.

Der Grundgedanke dieser Methode ist schon in meiner Note in den Comptes Rendus vom 5. Januar 1885 gegeben. Im November 1893 bemerkte ich, dass dieselbe Methode auf einige Specialfälle von Dom. MONTESANO, Atti dell' Istituto Veneto, 1888, p. 1425, angewendet ist, ohne irgend einer Erwähnung meiner Note zu begegnen.

[2] Ich nenne so die Transformation $x_i' = \frac{1}{L_i}$, wo L_i homogene lineare Function der x.

zwei Gegenkanten hat, die die Doppelgerade schneiden und die 8 Fundamentalpunkte in den 8 Doppelpunkten der Fläche.[1]

3. Um diesen Gedankengang weiter zu führen, sei bemerkt, dass wie in der Ebene auch im R_r der Satz besteht, dass eine abbildbare M_{r-1}^n im R_r nur dann durch eine birationale Transformation in sich übergeführt werden kann, wenn M_{r-1}^n einen Bestandtheil eines ∞^k Systemes bildet, wo k ein Minimum und dass allgemein das Minimum des Ranges einer solchen Transformation von den Zahlen p, u der Systeme abhängt, in welche M_{r-1}^n als solche eintreten kann.

LIII. Theorem. *Jede birationale Correspondenz unter den Punkten einer homaloïdalen M_2 des R_3 ist in unendlich vielen birationalen Transformationen des R_3 enthalten.*

Beweis. Es existirt wenigstens eine birationale Transformation T, welche die M_2 in eine Ebene überführt und die Correspondenz in eine birationale Transformation der Ebene. Th. LV beweist, dass diese in einer Unendlichkeit von birationalen Raumtransformationen enthalten ist, welche durch T^{-1} die Transformationen des Theoremes geben.

LIV. Theorem. *Jede quadratische Transformation Q^2 der Ebene ist in einer Unendlichkeit cubischer Transformationen mit 4 Fundamentalpunkten und in einer Unendlichkeit cubischer Transformationen mit 4 Fundamentalgeraden und von quadratischen Raumtransformationen enthalten.*

Beweis. Man überzeugt sich zuerst, dass diese Transformationen Ebenenpaare mit Q^2 gestatten und construirt sie dann gemäss der Angabe.

LV. Theorem. *Jede birationale Transformation der Ebene ist in einer Unendlichkeit birationaler Transformationen des Raumes enthalten.*[2]

---

[1] Denn die 8 Fundamentalpunkte bilden eine Configuration von MÖBIUS, für welche die Doppelgerade von F_4 eine der Schröterschen Geraden ist. Cf. SCHRÖTER, Journal für Mathematik, Bd. 91.

[2] Wenn es nicht auf den Satz LIV ankommt, kann man LV sofort für R_r beweisen. Die R_{r-1} eines Büschels mögen birationale Transformationen enthalten, welche sämmtlich Projectionen einer unter ihnen sind; dann ist die Gesammtheit eine birationale Transformation des R_r.

Beweis. Man zerlegt die ebene Transformation in Q^2 und construirt für jede eine der Transformationen aus LIV. Deren Zusammensetzung gibt die gewünschte Transformation. Hieraus:

LVI. Theorem. *Jede birationale Transformation des Raumes, welche eine Ebene in eine Ebene mit nicht degenerirter Correspondenz verwandelt, ist zusammensetzbar durch eine Reihe elementarer Transformationen, welche* 1) *Transformationen mit zwei collinear und* 2) *Transformationen mit zwei quadratisch bezogenen Ebenen sind.*

Die Transformationen 1) und 2) sind in endlicher Zahl von Arten vorhanden, welche man *elementare* Arten nennen kann, und wir erhalten das wichtige Resultat:

Die Transformationen unseres Theoremes sind alle zusammensetzbar durch Transformationen einer beschränkten Anzahl von elementaren Arten. Ich beweise ferner:

LVII. Theorem. *Jede Transformation des R_3, welche ich oben elementar genannt habe, ist in einer Unendlichkeit von birationalen Transformationen des R_4 enthalten und jede dieser in einer Unendlichkeit von Transformationen des R_5 u. s. w. und schliesse hieraus:*

LVIII. Theorem. *Jede Transformation des R_r, welche einen R_{r-1} in einen R_{r-1} eigentlich verwandeln kann, und in diesem einen R_{r-2} in einen R_{r-2} u. s. w., endlich einen R_2 in einen R_2, ist zusammensetzbar durch Transformationen einer beschränkten Anzahl von Arten, welche man elementar nennen kann.*

4. Es möge noch die Methode der n° 1 im ersten Sinne u. zw. auf die Transformationen mit 7 und 8 Punkten angewendet werden. Ein ∞^3 System von C_3 durch 6 der 7 Punkte, wird in ein System von Curven der Ordnung $3m - \Sigma y_i$ verwandelt werden. Für die Fundamentalsysteme mit 6 Punkten kann man die 6 Scheitel auf die 6 Fundamentalpunkte bringen und die C_3 werden in C_3'' durch 5 der Scheitel und durch den 7. Punkt verwandelt werden, welche auf F_3 biquadratische Curven durch einen festen Punkt P von F_3 liefern. Indem man die C_3'' durch eine C_3^1 ergänzt, welche a_6^2 enthält, erkennt man, dass die C_4 mit einem festen Kegelschnitte den Schnitt von F_3 mit F_2 durch P und diesen Kegelschnitt

bilden, also eine birationale Transformation liefern. Ähnlich für die Fundamentalsysteme mit 5 Punkten und für die Transformationen mit 8 Punkten in der Characteristik.

Jede Transformation mit 7, 8 Punkten ist das Bild zweier birationaler Systeme auf einer cubischen Fläche des R_3, welche durch eine Unendlichkeit monoïdaler Transformationen des R_3 reproducirt wird, deren zwei Centren coincidiren oder verkettet sind und deren Fundamentalcurve sich zertheilen kann, oder durch Transformationen mit $(n-2)$-facher Fundamentalgeraden.

§ 11. *Das Bild der typischen Transformationen auf den cubischen Flächen.*

Für die Transformationen mit 7 Punkten kann ein anderer Weg als der in § 10 verfolgt werden, indem man die F_3 von einem Punkte P in ihr auf die Ebene Π projicirt denkt. Man construirt eine F_3, welche die gegebene Curve 4. Ordnung liefert und verlangt die Correspondenz auf F_3, welche von P aus in die Collineation auf Π projicirt ist. Sei $4t_1t_3-t_2^2=0 \ldots 1)$ eine der unendlich vielen Darstellungen von L_4 in dieser Form; $x_4^2t_1+x_4t_2+t_3^2=0 \ldots 2)$ wird eine cubische Fläche der genannten Lage sein. Um F_3 zu construiren, schneidet man den Kegel $P(L_4)$ mit einer Fläche Φ_2, welche die Geraden von P nach den Berührungspunkten von t_1 mit L_4 enthält. Der Kegel $P(L_4)$ und die Fläche $(\Phi_2)^2$ bestimmen ein Büschel, welches auch Pt_1 und die gewünschte Fläche vereinigt enthält. Indem man nun die Collineation in Π vom Centrum P aus auf F_3 projicirt, erhält man zwei birationale Transformationen auf F_3, von welchen die eine die Zusammensetzung der anderen mit der centralen Involution P ist. Hiebei ist es wegen § 10 nothwendig, sich gegenwärtig zu halten, dass diese Involution in keiner monoïdalen cubischen Transformation enthalten ist, welche die Projection Λ_6 der L_4 auf die F_3 als Fundamentalcurve hätte.

Man findet durch die Discussion der Typen, dass unter den zwei Correspondenzen auf F_3 stets eine ist, welche in einer Collineation des R_3 enthalten ist. Ich bemerke noch, dass man mit dieser Discussion eigentlich eine 2-deutige Abbildung der F_3 auf die Ebene Π durchführt.

§ 12. *Die Methode der Büschel von Curven* 3. *O. für die typischen Transformationen.*

1. Die isolirten Typen sind dadurch ausgezeichnet, dass jede von ihnen wenigstens ein invariantes Büschel von C_3 besitzt. Ich will daher auf das Problem eingehen, a posteriori die Transformationen zu bestimmen, welche ein Büschel von C_3 reproduciren. Dies führt zu zwei Discussionen:

I. Wenn ein Büschel von C_3 bekannt ist, auf eindeutige Art in jeder Curve eine Correspondenz so zu bestimmen, dass das Resultat eine Transformation gibt, wo alle C_3 invariant sind.

II. Jene Büschel von C_3 zu finden, welche unter den C_3 eine binäre Projectivität gestatten, und unter je zwei successiven C_3 eine Correspondenz auf eindeutige Art festzusetzen, sodass die Wiederholung der erhaltenen Transformation auf eine der Art I. führt.

A. Die Büschel von Curven 3. Ordnung.

2. Eine genaue, hier erforderliche Kenntnis der Büschel verlangt, die Probleme zu lösen:

III. Alle Büschel zu bestimmen, welche unter einander durch die Alineationen und Berührungen differiren, d. h. welche durch Collineationen nicht äquivalent sind.

IV. Alle Büschel zu bestimmen, welche durch birationale Transformation nicht äquivalent sind.

Die absolute Invariante der Curve $L + \lambda M = 0$ ist von Wichtigkeit und indem man setzt

$$k = 24 \frac{(1 - \alpha + \alpha^2)^3}{(1 + \alpha)^2 (2 - \alpha)^2 (1 - 2\alpha)^2}$$

liefert die Gleichung $S^3 - kT^2 = 0$ 12 Werte von λ. Die C_3 mit gleicher absoluter Invariante bilden Gruppen einer Involution 12. O., der fundamentalen Involution, welche 6 Doppelelemente für die C_h und 4 dreifache Elemente für die C_e und 8 Doppelelemente für willkürliche α hat. Für das syzygetische Büschel entsprechen diese 8 Elemente den 4 Wende-

dreiecken. Die Discriminante $D^8(k)$ bestimmt die Natur des Büschels. Wenn $S_\lambda = 0$ oder $T_\lambda = 0$ Doppelelemente absorbiren, muss man mehrere der Coefficienten von

$$S_\lambda = S_L\lambda^2 + \Phi_1\lambda^3 + \Phi_2\lambda^2 + \Phi_3\lambda + S_M,$$

$$T_\lambda = T_L\lambda^6 + \Psi_1\lambda^5 + \Psi_2\lambda^4 + \Psi_3\lambda^3 + \Psi_4\lambda^2 + \Psi_5\lambda + T_M$$

gleich Null setzen. Eine Reduction im Grade der Involution ist nur möglich, wenn eine Curve existirt, welche der absoluten Invariante einen von k unabhängigen Factor gibt, d. h. eine Curve mit unbestimmter absoluter Invariante.

LIX. Theorem. *Jede C_3^3 des Büschels absorbirt 2 Curven der Invariante k, 1 Curve C_e und 1 Curve C_h, jede Z_{12} (Kegelschnitt nebst einer seiner Tangenten), absorbirt 3 Curven C_k, 2 Curven C_h, 1 C_e, jede Z_{111} (drei convergente Geraden) absorbirt 4 C_k, 2 C_h und 2 C_e.*

Die Curven Z_{11} (Doppelgerade nebst einfacher Geraden) und Z_1 (dreifache Gerade) vermindern den Grad der Involution um 6 und 8.

Es müssten nun alle Fälle, wo die vielfachen Punkte von $Z_3 = C_3^3$, Z_{111}, Z_{11}, Z_1 mit den Basispunkten coincidiren und die Reductionen der fundamentalen Involution aufgezählt werden. Man müsste ferner die Classification der Basisconfiguration mit der Classification der fundamentalen Involution combiniren. Von besonderer Wichtigkeit sind die Büschel mit constanter absoluter Invariante u. zw. nach Weglassung jener lediglich mit Z_{11} und Z_1, sind es diese:

	$6Z_3$	$3Z_{111}$	$2Z_{11}$	$4Z_{12}$	$Z_1 + Z_{111}$	$Z_1 + 2Z_3$	$Z_{11} + 2Z_{12}$
C_h	6	6	6	8	6	6	7
C_e	6	6	4	4	8	5	4

	$Z_{11} + 3Z_3$	$Z_{111} + 4Z_3$	$2Z_{111} + 2Z_3$	$3Z_{12} + 2Z_3$	$2Z_{12} + 3Z_3$
C_h	6	6	6	8	7
C_e	5	6	5	5	5

	$Z_{12} + Z_{111} + Z_3$	$Z_{111} + 2Z_{12} + Z_3$
C_h	6	7
C_e	5	5

Diejenigen Combinationen, wo beide Zahlen die Normalzahlen 6, 4 überschreiten, können nicht geometrisch existiren. Indem man diese Combinationen ausschliesst, bleiben: [1]

$$\text{Panharmonisch}\quad 4Z_{12}\,,\ Z_{11}+2Z_{12}\,,\ 2Z_{12}+3Z_{3}$$

$$\text{Panäquianharmonisch}\ 6Z_{3}\,,\ 3Z_{111}\,,\ Z_{1}+Z_{111}\,,\ Z_{1}+2Z_{3}\,,\ Z_{11}+3Z_{3},$$

$$Z_{111}+4Z_{3}.$$

Das grösste Interesse knüpft sich an das Büschel $6Z_3$. Ich gebe einige Eigenschaften desselben:

LX. Theorem. *Die Seiten der* ∞^1 *Hesseschen Dreiecke umhüllen eine Curve* Γ^3 *und die Scheitel erfüllen eine Curve* D_3. *Die zwei Curven berühren sich in den 6 Spitzen des Büschels, schneiden sich überdies in 6 Punkten auf den 6 Cuspidaltangenten und haben ein- und umgeschriebene Dreieckslage. Die Curve* Γ^3 *ist mit einer anderen* C_3 *die Jacobische Curve des Büschels von* C_4, *welche sich in den 6 Spitzen berühren. Die Geraden, welche die Punkte von* D_3 *mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Tangenten verbinden, sind Tangenten von* Γ^3.

B. Die Correspondenzen.

Nachdem man die 5 Correspondenzen entdeckt hat, ist das Problem I zu lösen. Um $u'+u\equiv\gamma$ in den Curven des Büschels zu construiren, hat man verschiedene Wege: 1) Man bestimmt sie durch das Centrum, welches in einem Basispunkte oder in den Schnittpunkten der C_3 mit einer rationalen Curve genommen werden kann. 2) Durch ein Paar entsprechender Punkte. Diese können zwei Basispunkte sein (was θ_2 gibt) oder einer ein Basispunkt und der andere in den Schnittpunkten der C_3 mit einer rationalen Curve oder alle zwei in zwei Schnittpunkten der C_3 mit zwei rationalen Curven. 3) Durch einen Doppelpunkt. Dieser kann ein Scheitel sein (Σ_2) oder gelegen in den Schnittpunkten der C_3 mit einer rationalen Curve. Es ist interessant, diejenigen Fälle zu untersuchen,

[1] Das einzige Büschel mit constanter absoluter Invariante k ist, wenn k willkürlich, wie mir resultirt, das Büschel, wo eine Inflexionstangente und die drei Berührungspunkte der vom Inflexionspunkte ausgehenden Tangenten gemeinsam sind. Diese 4 Tangenten bestimmen das Doppelverhältnis.

wo die Doppelpunkte zwei Curven erfüllen, von welchen jede die C_3 in zwei Punkten schneidet.

Um $u' + u \equiv \gamma$, $u' + \varepsilon u \equiv \gamma$, $u' + \varepsilon u \equiv \gamma$ zu construiren, bedient man sich derselben Arten, indem man darauf achtet, dass $u' + iu \equiv \gamma$, $u' \pm \varepsilon u \equiv \gamma$ nur für panharmonische und panäquiharmonische Büschel anwendbar sind. Ich hebe besonders die Transformation 10. O. hervor, welche entsteht, wenn man mittelst zwei Basispunkten als Paar $u' - u \equiv \gamma$ construirt. Das Äquivalenztheorem von § 2 I. Theil führt nun zum

LXI. Theorem. *Alle Transformationen, welche in Correspondenzen auf den ∞^1 C_3 des Büschels bestehen, sind birational äquivalent Transformationen derselben Art, welche Scheitel des Büschels als Doppelpunkte oder als entsprechende Paare von Punkten haben.*

Gemäss dem letzten Täfelchen verlangen die panharmonischen Büschel eine Alineation unter den Basispunkten und daher können die Transformationen keine Typen mit 8 Punkten sein. Unter den panäquiharmonischen Büscheln ist das einzige, welches Typen mit 8 Punkten liefert, jenes $6Z_3$. Für dieses gilt nun:

LXII. Theorem. *Die Transformation, welche durch die Correspondenzen $u' + \varepsilon u \equiv \gamma$ mit Doppelpunkt auf einem Scheitel des Büschels $6Z_3$ zusammengesetzt wird, ist 5. O. mit der Characteristik γ in c, $a_i\beta_{i+1}$, $\alpha_i b_{i+1}$, also E_6.*

Beweis. Die Transformation wird die 6 Spitzen der C_3^3 als invariante Punkte haben, also insgesammt 7 eigentliche Doppelpunkte. Irgend einer der anderen Scheitel wird in keiner Correspondenz sich selbst entsprechen können, woraus sofort zu schliessen ist, dass die Transformation 5. O. ist. Es ist unmöglich, dass zwei Scheitel ein involutorisches Paar bilden, denn dieses würde wegen den C_3^3 ∞^1 involutorische Paare liefern und die Wiederholung der Transformation würde also ∞^1 Doppelpunkte haben, welche eine Curve der 18. O. erfüllen würden. Da aber 6 Fundamentalpunkte in Coincidenz treten müssen, kann die Ordnung der zweiten Transformation nicht grösser als 7 sein. Die Characteristik muss also in 8 Punkten bestehen und da sie keine uneigentlichen Doppelpunkte haben darf, ist sie unmöglich von anderer Art als γ in c, $a_i\beta_{i+1}$, $\alpha_i b_{i+1}$.

Mittelst des § 2. II. Theil der cit. Abh. beweist man:

LXIII. Theorem. *Wenn ein Scheitel des Büschels* $3Z_{111}$ *als Doppelpunkt einer Correspondenz* $u' + \varepsilon u \equiv \gamma$ *genommen wird, werden zwei andere Scheitel ein involutorisches Paar dieser Correspondenzen bilden und die Transformation wird quadratisch:* a' *in* a, b' *in* b, c' *in* c.

C. Methode zur Auffindung der Büschel von C_3 mit particulärer fundamentaler Involution.

1. Für das Problem II muss man die Büschel kennen, welche eine binäre Projectivität unter ihren C_3 gestatten. Es wird sich herausstellen, dass hiezu die Lösung des Problemes IV hinreicht. Da die Gruppen der Involution unter einander transformirt werden müssen, folgt:

LXIV. Theorem. *Die fundamentale Involution muss mit der binären Projectivität unter den* C_3 *identisch sein oder sie als Bestandtheil enthalten.*

Hiebei sind natürlich die C_ε und C_h je unter einander transformirt.

2. Da man eine Correspondenz unter zwei C_3 mittelst eines Paares entsprechender Punkte bestimmen kann, so verificirt sich:

LXV. Theorem. *Wenn man zwei Büschel hat, welche unter einander mittelst einer binären Projectivität der* C_3 *als Individuen so beziehbar sind, dass die absoluten Invarianten erhalten bleiben, hat man immer eine birationale Transformation der Ebene, welche das eine Büschel in das andere verwandelt.*

Die fundamentale Involution begreift also alle Invarianten der Büschel gegen birationale Transformation in sich. Ich ergänze dieses Theorem durch das andere:

LXVI. Theorem. *Wenn man ein Büschel von* C_3 *mit einer gewissen fundamentalen Involution hat, kann man jeden der 9 Basispunkte als bestimmenden Doppelpunkt von Correspondenzen auf oder unter den* C_3 *nehmen und diese 9 Transformationen werden äquivalent sein.*

Beweis. Es existirt immer eine involutorische Transformation, welche das Büschel in sich verwandelt und das involutorische Paar $a_8 a_9$ enthält. Sie überträgt die D_9 für a_8 in die D_9 für a_9 und daher sind die zwei

D_9 birational äquivalent. Aber da die typische Transformation durch die zugehörige Curve D_9 bestimmt ist, sind auch die zwei Transformationen äquivalent.

Der Beweis bleibt aufrecht, insolange D_9 die Transformation bestimmt, was noch für zerlegte D_9 bestehen bleibt, da eine Zerlegung in 9 Geraden, welche die 8 Punkte zu dreien enthalten würden, nicht Statt hat.[1]

3. Wenn eine birationale Transformation ein Büschel von C_3 reproducirt, ist es nicht nothwendig, dass die Transformation periodisch sei. Aber auch in diesem Falle existirt ersichtlich unter den Curven des Büschels eine Projectivität, welche die fundamentale Involution in sich selbst verwandeln muss. Also:

LXVII. Theorem. *Wenn eine aperiodische oder periodische Characteristik mit 9 Punkten diese 9 Punkte in den Scheiteln eines Büschels von C_3 hat, werden die C_3 unter einander durch eine cyclische Projectivität transformirt werden, welche den Index* $\leqq 12$ *hat.*

Ein willkürliches Büschel von C_3 gestattet also keine andere birationale Transformation als jene des Problemes I.

4. Unter der Voraussetzung, dass eine eigentliche C_3 fest bleibt, kann man eine Menge von Characteristiken mit invarianten C_3-Büschel construiren und es wird dann eine blosse Consequenz hievon sein, wenn die C_3 eine solche Vertheilung haben, dass die fundamentale Involution reproducirt ist. Dieses ist also die beste Methode, um *alle* Büschel mit projectiver fundamentaler Involution zu finden, u. zw. in Betracht des Theoremes LXVII. Man bemerke hiebei noch:

LXVIII. Theorem. *Indem man auf ein Büschel von C_3 mit projectiver fundamentaler Involution eine der Constructionen von B. I. II. dieses Paragraphen für Correspondenzen unter zwei aufeinander folgenden C_3 anwendet, wird man i. A. eine aperiodische Transformation erhalten.*

LXIX. Theorem. *Alle Büschel mit projectiver fundamentaler Involution*

---

[1] Ein ähnlicher Beweis für die Transformationen mit 7 unter den 9 Punkten kann nicht gegeben werden und das Theorem für die Typen, welche mit den Septupeln zu bilden sind, besteht nicht.

sind erhältlich, indem man Transformationen mit 9 Punkten auf einer gegebenen eigentlichen oder uneigentlichen C_3 *so aufstellt, dass die 9 Punkte Basis eines Büschels sind.*

5. Indem man diese aperiodischen Characteristiken mit 9 Punkten construirt oder rechnet, wird man in den C_3 des Büschels Correspondenzen erhalten, welche nicht periodisch sein können, da die Projectivität unter den C_3 schon periodisch ist. Also muss die Correspondenz $u' - u \equiv \gamma$ werden und eine Wiederholung wird alle C_3 invariant mit $u' - u \equiv \gamma$ haben.

6. Man kann eine wichtige Anwendung dieser aperiodischen Transformationen machen, indem man eine beliebige über 9 Punkten construirt, welche die Basis eines Büschels von C_3 sind,[1] die Natur des Büschels und die binäre Projectivität Π studirt. Hernach stellt man eine neue Transformation T auf, so dass man einem beliebigen Basispunkte, indem man jetzt die Identität unter den C_3 verfolgt, die Schnittpunkte mit einer durch die vorausgesetzte Characteristik bestimmten rationalen Curve entsprechen macht.

Indem man die ursprüngliche aperiodische Transformation mit T^{-1} zusammensetzt, erhält man eine Transformation, welche die C_3 gemäss Π verwandelt und einen Scheitel invariant lässt und welche folglich periodisch ist. Was die Hilfstransformation T betrifft, kann man sie, sei es mittelst $u' + u \equiv \gamma$, sei es mittelst $u' - u \equiv \gamma$, sei es sogar mittelst $u' + mu \equiv \gamma$ $(m = i, \varepsilon)$ construiren. Also:

LXX. Theorem. *Alle periodischen Matrixtransformationen*[2] *werden erhalten, indem man aperiodische Transformationen mit 9 Punkten mit einer Transformation der unter B. 2) gefundenen Classe zusammensetzt,* und das wichtige

LXXI. Theorem. *Die besonderen Büschel von* C_3, *welche invariant sind durch aperiodische Transformationen mit 9 Punkten, sind dieselben als jene, welche invariant sind durch die periodischen Matrixtransformationen.*

LXXII. Theorem. *Umgekehrt erhält man alle existirenden aperiodischen*

[1] Der Schluss in n° 5 zeigt, dass alle derartig constructibeln Characteristiken mit den in B. 1) dieses § erhaltenen identisch sein müssen.

[2] Ich nenne so die Transformationen mit weniger als 9 Punkten.

Transformationen mit 9 Punkten, indem man die Matrixtransformationen mit der unter B. 2) entdeckten Classe zusammensetzt.

LXXIII. Theorem. *Es gibt kein anderes Büschel mit projectiver fundamentaler Involution oder panharmonisches oder panäquianharmonisches Büschel als die durch die periodischen Typen gelieferten und also in der cit. Abh. enthaltenen Büschel.*

LXXIV. Theorem. *Es gibt Büschel 6 C_3^3 mit binärer Projectivität eines jeden der Indices 2, 3, 4, 5, 6.*

Beweis. Nach dem Vorhergehenden müsste man eine periodische Transformation mit diesem Büschel haben. Aber unsere Aufzählung sowohl nach der cit. Abh. als nach der Methode gegenwärtiger Arbeit liefert alle diese Büschel.

LXXV. Theorem. *Es gibt kein anderes panharmonisches Büschel mit $4Z_{12}$ als jenes, wo die $4Z_{12}$ ein äquianharmonisches Quadrupel bilden.*

LXXVI. Theorem. *Es gibt kein Büschel ohne Berührung und Alineation, wo zwei Scheitel auf allen C_3 eine elliptische Entfernung $\frac{C}{m}$ hätten.*

LXXVII. Theorem. *Es existirt kein Büschel, wo die Gruppen des Büschels durch Abelsche Gleichungen bestimmt wären, ausgenommen jene, welche durch eine Matrixtransformation invariant sind.*

D. Die Büschel von C_{3s} mit 9 s-fachen Punkten.

Man kann noch die aperiodischen Transformationen verlangen, welche ein Büschel von C_{3s} $(9a^s)$ reproduciren und man wird sie auf einer vorgelegten invarianten C_3 construiren wie für $s = 1$.[1] Jedoch kann man hier nicht mehr in jeder Curve eine Correspondenz wie in B. 1) 2) bestimmen, weil man die s Nachbarpunkte eines Scheitels nicht trennen kann; man gelangt aber zu einer aperiodischen Transformation, welche das Büschel reproducirt, in folgender Weise. Man rechne für jede C_{3s} eine Parametervertheilung die Summe der s Parameter für a_1 und die Summe der s-Parameter für a_2, dann die Differenz γ dieser zwei Summen und man wird eindeutig eine Correspondenz $u' - u \equiv \gamma$ auf jeder Curve C_{3s} und

[1] Ich hebe den speciellen Fall hervor, wo die C_3 durch die 9 s-fachen Punkte von C_{3s} in 3 Geraden zerfällt.

in der Gesammtheit dieser Correspondenzen eine birationale Transformation haben. Es ist aber nicht möglich, die übrigen Correspondenzen in diese ∞^1 C_{3s} zu verlegen, da jede derselben einen vereinzelten ausgezeichneten Punkt besitzt, nämlich γ oder $\gamma(1-i)$ oder $2\gamma\varepsilon$ und es aber wegen der Relation $k = 3sn - s\Sigma\alpha = s(3n - \Sigma\alpha)$ für $s > 1$ keine Curve C_n giebt, welche C_{3s} in je nur einem Punkte schneiden würde. Dieselbe Methode wie für $s = 1$ erlaubt ferner, Büschel von C_{3s} $(9a^s)$ mit projectiver fundamentaler Involution und, falls es deren geben würde, panharmonische und panäquianharmonische Büschel zu finden.

§ 13. *Eine Classe mehrdeutiger Transformationen.*

Um den § 8 zu ergänzen, bediene ich mich des Umstandes, dass jeder Typus ein mit gleichem Index invariantes lineares ∞^2 System von Curven besitzen muss und übertrage mittelst dieses Netzes in eine andere Ebene. Ich spreche den Satz gleich für den R_r aus:

LXXVIII. Theorem. *Jede periodische Transformation in R_r kann durch einseitig rationale Transposition in eine periodische Collineation desselben Indexes übertragen werden.*

2. In der cit. Abh. habe ich von der Möglichkeit gehandelt, zwei Ebenen in Correspondenz zu setzen, sodass den Punkten der einen Ebene die Cyclen einer Collineation der anderen entsprechen. Um eine irrige Meinung zu widerlegen, bemerke ich, dass in einer Abhandlung: *Sopra le involuzioni piane* F. Chizzoni, wo er von meiner Preisschrift spricht, vorauszusehen glaubt, die periodischen Transformationen werden Involutionen liefern können, welche nicht eindeutig auf die Punkte einer Ebene beziehbar sind. Indessen kann ich erklären, dass man für jeden Typus ein Netz von Curven finden kann, welche sich gegenseitig in nur einem Cyclus der Transformation schneiden. Also:

LXXIX. Theorem. *Alle periodischen birationalen Transformationen theilen die Ebene in ∞^2 Cyclen, welche eine rationale Involution bilden.*

3. Ich füge bei dieser Gelegenheit hinzu, dass auch der Zweifel

Chizzoni's, welchen er für die ebenen Involutionen i. A.[1] ausspricht, unbegründet ist, denn:

LXXX. Theorem. *Jede Involution in einem linearen Raume R_r oder also in einer abbildbaren M^n_r ist rational, d. h. durch r lineare Parameter darstellbar.*

LXXXI. Theorem. *Jedes algebraische System von Punktgruppen in einem linearen Raume R_r, wo durch jeden Punkt des R_r zwei Punktgruppen bestimt sind, ist rational, d. h. durch r lineare Parameter rational darstellbar.*

Und allgemeiner gilt:

LXXXII. Theorem. *Jede lineare oder quadratische $\infty^{r-i+\lambda}$ Mannigfaltigkeit von M^n_i im R_r ist durch rationale Functionen α $r-i+\lambda$ linearen Parametern darstellbar, auch wenn $\lambda = 0$.*[2]

Neben diese Theoreme stellt sich begründend und weiterführend:

LXXXIII. Theorem. *Jedes in einem linearen R_r enthaltene lineare ∞^i System von M_{r-i} kann als vollständiger Schnitt von i linearen ∞^i Systemen von M_{r-1} angesehen werden.*

Aus LXXXII. folgt insbesondere für $i = 0$:

LXXXIV. Theorem. *Jede Involution k. Stufe in einem linearen R_r oder sogar auf irgend einer Mannigfaltigkeit M^n_r, d. h. ein ∞^{kr} System von Punktgruppen, von welchem durch k Punkte eine einzige Gruppe geht, ist rational (durch rk lineare Parameter darstellbar).*

---

[1] Ich habe von der Abhandlung G. Castelnuovo's *Sulla razionalità delle involuzioni piane* in Math. Annalen Bd. 44 erst am 10. December 1894 hier Kenntniss genommen, bemerke aber sofort, dass in den Sätzen der ersten 6 Nummern ein nicht unwesentlicher Fehler unterlaufen ist. — (Zürich, 26. December 1894.)

[2] Es gilt sogar das allgemeine Theorem: *Für $\lambda > 0$ ist jede in einer nicht abbildbaren (also nicht unicursalen) M^n_r enthaltene Reihe $\infty^{r-i+\lambda}$ von M_i, aus welcher eine oder zwei M_i durch λ Punkte der M^n_r gehen, rational durch $r-i+\lambda$ lineare Parameter darstellbar.*

Dieses Theorem enthält als speciellen Fall das Theorem von F. Enriquez, das sich in C. Segre's *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito* (Annali di matematica, ser. II, t. 22) § 6 aufgenommen findet.

4. Die 1-i-deutige Transformation wird in der i-fachen Ebene eine Übergangscurve haben. Es kann nun geschehen, dass diese eine ebene birationale Transformation gestattet, welche sie reproducirt, etwa vom Index i. Indem diese mittelst der 1-i-deutigen Transformation übertragen wird, erhält man in der einfachen Ebene eine periodische Transformation, welche mit der erst gegebenen vertauschbar ist.

Anmerkung. Es bietet sich hier der folgende algebraische Satz dar: Wenn die in einem Curvennetze erscheinende m-deutige Transformation sich in eine birationale und eine andere zerlegt, so zerlegt sie sich sofort in m birationale Transformationen, welche sämmtlich periodisch sind.

Anhang. Es ist nunmehr alles vorbereitet für die Berechnung der algebraischen Formeln der 29 existirenden Typen. Für einige kennt man die Formeln interner Transformationen, welche man also nur zusammenzusetzen hat, wie B_{14} aus Collineation und θ_2. Für einige bediene man sich der Methode des § 5, um die Formeln aus einfacheren zusammenzusetzen. Ähnlich wird man für gewisse Typen vorgehen, deren Characteristik eine durch Formeln einfach auszudrückende Configuration bildet. So sind bereits die Formeln für a' in a, b' in b, c' in c in der cit. Abh. gegeben und durch Zusammensetzung mit Collineationen erhält man die Formeln für B_9 und andere Typen. Wenn endlich die Transformation eine invariante C_3 hat, was immer der Fall ist, und man kennt gründlich die Lage der Punkte auf der C_3, was ich nach den eingehenden Untersuchungen der cit. Abh. behaupten darf, so kann man sie durch Formeln ausdrücken. Auch wenn man nur die Parameter, namentlich auf C_3^3, kennt, kann man hieraus ohne jede Schwierigkeit die Formeln in homogenen Trilateralcoordinaten herleiten.

(Die vorstehende Arbeit war bis auf § 3 des I. und § 10, sowie § 12 C. D. des II. Theiles im Jahre 1885 abgefasst.)

Paris, den 10. Juni 1894.

ÜBER REDUCTIBLE BINOME

VON

K. TH. VAHLEN
in BERLIN.

ABEL beweist in § II der *Démonstration de l'impossibilité de la résolution des équations générales qui passent le quatrième degré* den Satz:

Wenn n eine Primzahl ist, so kann eine n^{te} Wurzel einer rationalen Funktion beliebig vieler unabhängiger Variablen $x', x'', \ldots$ keiner Gleichung niederen als n^{ten} Grades genügen, deren Coëfficienten rationale Funktionen von $x', x'', \ldots$ sind.

Wir stellen uns allgemeiner die Aufgabe:

Wann kann eine n^{te} Wurzel einer dem natürlichen Rationalitätsbereich $(x', x'', \ldots)$ entstammenden rationalen Grösse einer Gleichung niederen als n^{ten} Grades genügen, deren Coëfficienten demselben Bereich angehören?

Der Rationalitätsbereich sei zunächst der der rationalen Zahlen. Ist c eine rationale Zahl und genügt $z = \sqrt[n]{c}$ einer Gleichung niedrigeren als n^{ten} Grades, welche mit der Gleichung $z^n - c = 0$ den irreductibeln Faktor $a + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{m-1} z^{m-1} + z^m$ gemein hat, so zerfällt das Binom: $z^n - c$ in das Produkt:

$$(a + a_1 z + \ldots + z^m)(b + b_1 z + \ldots + z^{n-m}).$$

Durch Multiplikation des Binoms mit einem geeigneten Faktor und Einführung einer anderen Variablen z können wir bewirken, dass c eine ganze Zahl wird. Alsdann sind, nach einem bekannten Satze von GAUSS,[1] auch die Coëfficienten $a, a_1, \ldots, b, b_1, \ldots$ ganze Zahlen.

[1] Disquisitiones arithmeticae, art. 42.

Ist jetzt wenigstens ein Wert von $\sqrt[n]{c}$ reell, so hat das Produkt der m Wurzeln der Gleichung:

$$a + a_1 z + \ldots + z^m = 0$$

absolut genommen einerseits den Wert $|a|$, andrerseits den Wert $|\sqrt[n]{c^m}|$. Aus der Gleichung:

$$|\sqrt[n]{c^m} = a|$$

folgt, dass c die ν^{te} Potenz einer positiven oder negativen ganzen Zahl, ν ein Teiler von n ist. Wir erhalten also das Binom: $z^{\mu\nu} - \gamma^\nu$.

Ist zweitens kein Wert von $\sqrt[n]{c}$ reell, d. h. ist n gerade, c negativ, so haben wir es mit dem Binom $z^{2n} + c$ zu thun, wo jetzt c eine positive ganze Zahl ist.

Ist $f(z)$ ein irreductibler Faktor von $z^{2n} + c$, so muss derselbe bei der Substitution

$$z \| - z$$

entweder in sich selbst oder in einen andern irreductibeln Faktor von $z^{2n} + c$ übergehen. Im ersten Fall wäre $f(z)$, also auch der complementäre Faktor $\frac{z^{2n} + c}{f(z)}$ eine ganze Function von z^2 und man erhielte durch die Substitution $z^2 \| z$ ein reductibles Binom halb so hohen Grades. Von derartig abgeleiteten Binomen können wir natürlich absehen.

Im zweiten Fall ist $f(z) . f(-z)$ eine ganze Funktion von z^2; wir kommen also nur dann nicht auf den ersten Fall zurück, wenn $f(z)$ vom höchsten also n^{ten} Grade ist. Es kommt also nur die Zerlegung

$$(a + a_1 z + a^2 z^2 + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n)(a - a_1 z + a_2 z^2 - \ldots + (-1)^{n-1} a_{n-1} z^{n-1} + (-1)^n z^n)$$

in Betracht, die aber für ungrades n auf das Binom $a^2 - z^{2n}$ führt. Es muss also n gerade sein, und daher ist nur noch die Zerlegung:

$$z^{4n} + a^2 = (a + a_1 z + \ldots + z^{2n})(a - a_1 z + \ldots + z^{2n})$$

zu untersuchen.

Die Coëfficienten a genügen den Gleichungen:

$$2aa_2 - a_1^2 = 0,$$

$$2aa_4 - 2a_1a_3 + a_2^2 = 0,$$

$$2aa_6 - 2a_1a_5 + 2a_2a_4 - a_3^2 = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2a - 2a_1a_{2n-1} + 2a_2a_{2n-2} - \ldots \pm a_n^2 = 0.$$

Ist p ein Primfaktor von $2a$, so folgt aus diesen Gleichungen der Reihe nach, dass auch $a_1, a_2, \ldots, a_n$ durch p teilbar sein müssen, und dann aus der letzten, dass $2a$ durch p^2 teilbar sein muss.

Setzt man

$$2a = p^2b, \qquad a_i = p \,.\, b_i \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

so gestatten die Gleichungen:

$$pbb_2 - b_1^2 = 0,$$

$$pbb_4 - 2b_1b_3 + b_2^2 = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$b - 2b_1b_{2n-1} + \ldots \pm b_n^2 = 0$$

denselben Schluss in Bezug auf einen Primfaktor von b. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens ergiebt sich, dass $2a$ ein Quadrat, also $a = 2c^2$ sein muss. Das Binom $z^{4n} + 4c^4$ ist aber durch die Substitution $z \left\| \frac{z^n}{c} \right.$ aus dem Binom:

$$z^4 + 4$$

abgeleitet, und dieses letztere ist in der That reductibel; es ist:

$$z^4 + 4 = (z^2 - 2z + 2)(z^2 + 2z + 2).$$

Zusammenfassend können wir den Satz aussprechen:

Alle im Bereich der rationalen Zahlen reductiblen Binome erhält man aus den beiden:

$$z^m - 1 \quad \text{und} \quad z^4 + 4$$

durch die Substitution $z \left\| \frac{z^n}{c} \right.$, *wo* c *eine rationale Zahl ist.*

Der Satz ist ohne Mühe auf den natürlichen Rationalitätsbereich beliebig vieler unabhängiger Variablen auszudehnen, und bedeutet alsdann c eine rationale Grösse dieses Bereiches.

Über das merkwürdige Binom

$$z^4 + 4,$$

das also, von trivialen Fällen abgesehen, das einzige reductible ist, finden sich in Lucas, *Théorie des nombres,* interessante historische Notizen. So hatte schon Sophie Germain den Satz ausgesprochen: Das Binom $z^4 + 4$ stellt ausser 5 keine Primzahl dar.

Für $z = 2^{-n}$ ergiebt sich die Zerlegung:

$$2^{4n+2} + 1 = (2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1)(2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1),$$

aus welcher z. B. für $n = 14$ die Zerlegung von $2^{58} + 1$ folgt, eine Zerlegung, die Landry lange vergeblich gesucht hat, und die ihm von allen in seiner *Décomposition des nombres* $2^n \pm 1$ *en leurs facteurs premiers, de* $n = 1$ *à* $n = 64$, *moins quatre* (Paris, 1869) ausgeführten Zerlegungen weitaus die grössten Schwierigkeiten gemacht hat.

ÜBER DIE STEINERSCHE FLÄCHE

VON

K. TH. VAHLEN

in BERLIN.

Die merkwürdige Haupteigenschaft der Steinerschen Fläche: von jeder Tangentialebene in zwei Kegelschnitten geschnitten zu werden, ist durch eine ganz elementare Determinantenbetrachtung zu beweisen.

Die homogenen Coordinaten x_0, x_1, x_2, x_3 der Punkte einer Steinerschen Fläche mögen durch drei homogene Parameter p_0, p_1, p_2 so dargestellt werden:

$$x_0 = \sum_{i,k} a^0_{ik} p_i p_k,$$

$$x_1 = \sum_{i,k} a'_{ik} p_i p_k,$$

$$x_2 = \sum_{i,k} a''_{ik} p_i p_k,$$

$$x_3 = \sum_{i,k} a'''_{ik} p_i p_k. \qquad \left(\begin{matrix} i, k = 0, 1, 2 \\ a^0_{ik} = a^0_{ki} \text{ etc.} \end{matrix}\right)$$

Die Gleichung der Tangentialebene im Punkte (y_0, y_1, y_2, y_3) oder (q_0, q_1, q_2) ist:

$$\begin{vmatrix} x_0 & \frac{\partial y_0}{\partial q_0} & \frac{\partial y_0}{\partial q_1} & \frac{\partial y_0}{\partial q_2} \\ x_1 & \frac{\partial y_1}{\partial q_0} & \frac{\partial y_1}{\partial q_1} & \frac{\partial y_1}{\partial q_2} \\ x_2 & \frac{\partial y_2}{\partial q_0} & \frac{\partial y_2}{\partial q_1} & \frac{\partial y_2}{\partial q_2} \\ x_3 & \frac{\partial y_3}{\partial q_0} & \frac{\partial y_3}{\partial q_1} & \frac{\partial y_3}{\partial q_2} \end{vmatrix} = 0,$$

also die Beziehung zwischen den Parametern p_0, p_1, p_2 ihrer Schnittcurve:

$$\left| \sum_{i,k} a_{ik} p_i p_k \quad \sum_h a_{h0} q_h \quad \sum_h a_{h1} q_h \quad \sum_h a_{h2} q_h \right| = 0, \quad \left(\begin{smallmatrix} h, i, k = 0, 1, 2 \\ a = a^0, a', a'', a''' \end{smallmatrix}\right)$$

d. h.

$$\sum_{i,k} p_i p_k \left| a_{ik} \quad \sum_h a_{h0} q_h \quad \sum a_{h1} q_h \quad \sum a_{h2} q_h \right| = 0.$$

Es ist nachzuweisen, dass diese ternäre quadratische Form in zwei Linearfaktoren zerfällt, dass also die Determinante:

$$\begin{vmatrix} A_{00} & A_{10} & A_{20} \\ A_{01} & A_{11} & A_{21} \\ A_{02} & A_{12} & A_{22} \end{vmatrix} = 0$$

der Grössen $A_{ik} = \left| a_{ik} \ \sum_h a_{h0} q_h \ \sum_h a_{h1} q_h \ \sum_h a_{h2} q_h \right|$ verschwindet. In der That bringt man die erste Kolonne zum Verschwinden, wenn man die mit $\frac{q_1}{q_0}$ und $\frac{q_2}{q_0}$ multiplicirte zweite und dritte Kolonne zur ersten addirt; denn es ist:

$$A_{0k} q_0 + A_{1k} q_1 + A_{2k} q_2 = \left| \sum_h a_{hk} q_h \quad \sum_h a_{h0} q_h \quad \sum_h a_{h1} q_h \quad \sum_h a_{h2} q_h \right| = 0$$

für $k = 0, 1, 2$.

Die analoge Betrachtung im Gebiete von n Dimensionen ergiebt, auch für $n = 2$, nur das triviale Resultat, dass das Schnittgebilde singulär ist.

MÉMOIRE
SUR LE PENDULE DE LONGUEUR VARIABLE

PAR

LÉON LECORNU

À PARIS.

Les Mémoires de l'ancienne Académie des sciences renferment un travail de dix pages, lu par l'abbé BOSSUT dans la séance du 5 septembre 1778, et intitulé: *Sur le mouvement d'un pendule dont la longueur est variable.* L'auteur commence par rappeler que, dès 1707, CARRÉ avait publié un écrit sur le même sujet, mais en se bornant au cas où le raccourcissement se produit par intermittences, à chaque passage du pendule par la verticale. BOSSUT entreprend de traiter la question des oscillations planes dans toute sa généralité. Par des considérations de cinématique infinitésimale il forme, assez péniblement, l'équation différentielle du second ordre qui régit le mouvement considéré; puis, dans l'hypothèse d'un raccourcissement proportionnel au temps, et en supposant en outre les oscillations infiniment petites, il parvient à une équation du premier ordre: équation de RICCATI, non intégrable. Il conclut que, pour achever l'examen du problème, on serait obligé de recourir à un procédé graphique ou à une intégration par séries; mais il n'emploie ni l'un, ni l'autre, et il se borne à ajouter cette remarque, intéressante au point de vue pratique, que, par le fait des oscillations, la tension du fil étant variable, la force nécessaire pour enrouler uniformément le fil sur un treuil ne saurait non plus demeurer constante.

Le reste du mémoire est consacré à l'étude sommaire de différents cas dans lesquels le raccourcissement du fil ne se produit pas d'une manière uniforme. Les résultats obtenus sont les suivants:

1°. Si le fil s'enroule sur un treuil mû par une force constante, la loi des oscillations, supposées infiniment petites, est encore exprimée par une équation de Riccati, non intégrable;

2°. Il en est de même si le fil, après avoir passé sur deux poulies de renvoi, est sollicité à sa seconde extrémité par un poids qui tombe verticalement;

3°. On parvient à une équation intégrable quand on suppose que l'extrémité du pendule, au lieu d'osciller librement, traîne sur un plan fixe horizontal: ce qui, à vrai dire, constitue un problème tout différent de celui du pendule.

Depuis 1778, ce sujet paraissait tombé dans l'oubli quand, au commencement de 1894, M. Haton de la Goupillière posa, dans l'*Intermédiaire des mathématiciens*, une question ainsi conçue:

»91[R7fβ]. Le mouvement d'un pendule simple dont la longueur se raccourcit proportionnellement au temps (c'est le cas des oscillations d'une benne non guidée pendant son ascension dans un puits de mine) a-t-il été étudié?»

Cette question me suggéra la présente étude, dont un résumé fut inséré le 15 janvier 1894 dans les Comptes rendus de l'Académie des sciences. A la suite de cette publication j'appris, par M. Boussinesq, l'existence du travail de Bossut. Mon devancier s'était borné à écrire l'équation fondamentale sans en dégager les conséquences; ici, je développe les calculs et j'analyse les propriétés du mouvement. J'examine en outre, dans une dernière partie, le cas du pendule conique.

I.

Equation du mouvement.

Soit l la longueur variable du pendule à oscillations planes. Soit, pour l'instant considéré, θ l'angle d'écart, par rapport à la verticale. Soient, par rapport à deux axes, l'un horizontal, l'autre vertical descendant, menés par le point de suspension, x et y les coordonnées du point matériel qui termine le pendule. On a:

$$x = l \sin\theta, \qquad y = l \cos\theta.$$

D'ailleurs, en appelant T la tension du fil, on peut écrire:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + T\frac{x}{l} \qquad = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + T\frac{y}{l} - g = 0,$$

d'où:

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} - gx = 0$$

ou bien:

$$\frac{d}{dt}\left(l^2\frac{d\theta}{dt}\right) + gl\sin\theta = 0$$

ou encore:

$$(1) \qquad l\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dl}{dt}\frac{d\theta}{dt} + g\sin\theta = 0.$$

Telle est l'équation du mouvement: on l'obtiendrait immédiatement en remarquant que l'accélération aréolaire est égale au moment de la pesanteur.

La valeur de la tension T se déduit aisément de ce qui précède; mais il est plus simple d'exprimer que cette tension est égale à la composante de la pesanteur suivant le fil, augmentée de la force centrifuge et diminuée de la force d'inertie due au glissement. On trouve ainsi:

$$(2) \qquad T = g\cos\theta + l\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \frac{d^2l}{dt^2}.$$

Nous admettrons désormais que la longueur l varie proportionnellement au temps, et nous poserons en conséquence:

$$l = a + bt,$$

a et b désignant deux constantes, dont la première est essentiellement positive. Pour fixer les idées, nous conviendrons que, sauf avis contraire, la *vitesse d'allongement* b est également positive, c'est à dire que la longueur du pendule croît avec le temps. Les équations (1) et (2) deviennent, dans ces conditions:

$$(3) \qquad (a + bt)\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2b\frac{d\theta}{dt} + g\sin\theta = 0,$$

$$(4) \qquad T = g\cos\theta + (a + bt)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

En vertu des relations évidentes:

$$\frac{d\theta}{dt} = b\frac{d\theta}{dl}, \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = b^2\frac{d^2\theta}{dl^2},$$

l'équation (3) peut encore se mettre sous la forme:

$$(5) \qquad l\frac{d^2\theta}{dl^2} + 2\frac{d\theta}{dl} + \frac{g}{b^2}\sin\theta = 0$$

ou bien:

$$(6) \qquad \frac{d^2}{dl^2}(\theta l) + \frac{g}{b^2}\sin\theta = 0.$$

Si, au lieu d'un pendule simple, on considérait un pendule composé, la longueur l' du pendule simple équivalent serait exprimée, en fonction de la distance l du centre de gravité à l'axe de suspension et du rayon R de giration par rapport à ce centre, au moyen de la formule connue:

$$l' = l + \frac{R^2}{l}.$$

Pour un allongement uniforme du fil, on aurait, dans ce cas:

$$l' = a + bt + \frac{R^2}{a + bt}.$$

Après avoir arbitrairement choisi l'instant initial auquel correspond la longueur a, prenons, à partir de cet instant, un intervalle de temps assez restreint pour que le rapport $\frac{bt}{a}$ soit très petit. On pourra alors écrire approximativement:

$$l' = a + bt + \frac{R^2}{a}\left(1 - \frac{b}{a}t\right) = a + \frac{R^2}{a} + b\left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right)t.$$

On voit par là que la loi du mouvement du pendule composé est à chaque instant la même que celle du mouvement du pendule simple équivalent, la vitesse d'allongement b étant simplement remplacée par $b\left(1 - \frac{R^2}{a^2}\right)$.

Revenons au pendule simple et supposons les oscillations infiniment petites. L'équation (5) se réduit à:

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{b^2}\theta = 0. \tag{7}$$

Si l'on remplace θ par $e^{\int z dt}$, il vient:

$$\frac{dz}{dt} + z^2 + 2\frac{z}{l} + \frac{g}{b^2 l} = 0.$$

Posons ensuite: $z = v - \frac{1}{l}$ et nous obtenons:

$$\frac{dv}{dt} + v^2 + \frac{g}{b^2}\frac{1}{l} = 0. \tag{8}$$

C'est l'équation de Riccati trouvée par Bossut. Malheureusement cette transformation de l'équation du second ordre ne facilite pas l'intégration et complique l'interprétation des résultats; aussi n'en ferons-nous pas usage.

L'équation du second ordre relative aux oscillations infiniment petites prend une forme très simple si l'on pose:

$$\theta l = u, \qquad l = \frac{b^2}{g}x;$$

il vient, d'après l'équation (6):

$$x\frac{d^2u}{dx^2} + u = 0. \tag{9}$$

II.

Etude des oscillations infiniment petites.

Partons de l'équation (9) qui vient d'être établie. Voici d'abord une méthode graphique permettant de construire, par approximation, une

intégrale quelconque. Si l'on remplace x par $\frac{z}{c}$, c désignant une constante, on peut écrire:

$$\frac{d}{dz}\left(z\frac{du}{dz} - u\right) + \frac{u}{c} = 0.$$

Considérons la courbe ayant pour coordonnées rectangulaires z et u. L'ordonnée à l'origine de la tangente, relativement à l'axe des u, est la longueur: $h = u - z\frac{du}{dz}$. On a donc: $\frac{dh}{dz} = \frac{u}{c}$.

Connaissant un point (z, u) et la tangente en ce point, on aura sensiblement la variation Δh de l'ordonnée à l'origine, correspondant à une petite variation Δz de l'abscisse, en prenant: $\Delta h = \frac{u}{c}\Delta z$, et l'on en déduira la tangente au nouveau point $(z + \Delta z, u + \Delta u)$, considéré comme appartenant à la première tangente. En continuant de même, on trouvera les côtés successifs d'un polygone, d'autant moins différent de la courbe cherchée que Δz est plus petit.

La construction peut être effectuée de la manière suivante.[1] Soit MM' un côté du polygone et P le point où son prolongement rencontre l'axe de u. Soient A et B les points où l'ordonnée du point M coupe l'axe des z et une parallèle à cet axe menée au-dessous de lui, à la distance constante c. Portons au-dessous de P, sur l'axe des u, la petite longueur PQ, égale à la projection Δz de MM' sur l'axe des z. Soit enfin S le point de rencontre de BQ avec AP. La droite SM coupe l'axe des u en un point P', qui détermine le côté suivant, $P'M'M''$, du polygone.

Remarquons que, si la longueur c est prise égale à $\frac{b^2}{g}$, la courbe ainsi obtenue est précisément celle que décrit l'extrémité libre du pendule (les ordonnées u étant d'ailleurs amplifiées à une échelle arbitraire). En effet, comme les oscillations sont supposées infiniment petites, la projection verticale de la tige est égale à l, c'est-à-dire à $\frac{b^2}{g}x$ ou bien encore à z, et la projection horizontale est égale à θl, c'est à dire à u. Comme $\frac{d^2u}{dz^2}$ est proportionnel à u, il est clair que la courbe possède un point d'inflexion chaque fois qu'elle croise l'axe des z. Donc:

[1] Le lecteur est prié de faire la figure.

La trajectoire de l'extrémité du pendule présente une inflexion chaque fois que le pendule passe par la verticale.

Au même degré d'approximation, on peut encore dire que:

La courbure de la trajectoire varie proportionnellement à l'écart horizontal.

Une autre propriété résulte de l'équation évidente:

$$h = \frac{1}{c}\int u\,dz.$$

Quand l'intégrale du second membre est prise entre deux valeurs de z correspondant à une même valeur de h, cette intégrale est nulle. D'après cela:

Si l'on considère, sur la trajectoire, deux points tels que leurs tangentes aillent couper en un même point l'horizontale du point de suspension, la verticale du point de suspension partage en deux parties égales l'aire limitée par la trajectoire et par les horizontales des deux points considérés.

Cette propriété s'applique, en particulier, à deux points quelconques d'écart maximum, puisque, pour chacun de ces points, la tangente passe au point de suspension.

J'arrive à l'étude analytique des fonctions u qui vérifient l'équation (9). Cette équation se rencontre dans la théorie des fonctions de Bessel, appelées aussi *fonctions cylindriques.* Il serait inutile d'en dire davantage, si nous n'avions pas à faire application de résultats connus au problème du pendule de longueur variable. J'aurai soin, d'ailleurs, dans ce qui va suivre, de démontrer brièvement les théorèmes dont il sera fait usage.

Par la méthode des coefficients indéterminés, on se procure sans peine la solution particulière:

$$(10) \qquad \varphi = x - \frac{2x^2}{(1\,.\,2)^2} + \frac{3x^3}{(1\,.\,2\,.\,3)^2} - \frac{4x^4}{(1\,.\,2\,.\,3\,.\,4)^2} + \dots$$

dont la vérification est immédiate. Avec les notations usuelles, la fonction φ n'est autre chose que $\sqrt{x}J_1(2\sqrt{x})$, en désignant par J_1 la fonction cylindrique d'indice *un* et de première espèce. Il est évident que cette solution peut être multipliée par une constante arbitraire.

A quelle condition le mouvement du pendule est-il représenté par l'équation (10)? Pour le voir, formons d'abord la dérivée première:

$$\frac{d\varphi}{dx} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{(1 \cdot 2)^2} - \frac{x^3}{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2} + \dots \tag{11}$$

qui est, par définition, la fonction d'indice zéro: $J_0(2\sqrt{x})$, et considérons l'instant d'une élongation, c'est-à-dire d'un maximum d'écart. On doit avoir à la fois:

$$\theta l = \varphi, \qquad l = \frac{b^2}{g} x, \qquad d\theta = 0$$

d'où l'on tire:

$$\theta \frac{dl}{dx} = \frac{d\varphi}{dx},$$

ou bien:

$$\frac{b^2}{g} \theta = \frac{d\varphi}{dx},$$

c'est-à-dire:

$$\frac{\varphi}{x} = \frac{d\varphi}{dx}. \tag{12}$$

En remplaçant φ et $\frac{d\varphi}{dx}$ par leurs valeurs, cette équation devient:

$$1 - \frac{2x}{(1 \cdot 2)^2} + \frac{3x^2}{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2} - \dots = 1 - \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{(1 \cdot 2)^2} - \dots$$

c'est-à-dire, en divisant par x:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{2 \cdot 3x}{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2} + \frac{3 \cdot 4x^2}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)^2} - \dots = 0. \tag{13}$$

Soit ξ l'une quelconque des racines de cette équation. La condition cherchée est:

$$l = \frac{b^2}{g} \xi.$$

En d'autres termes, si l désigne la longueur du pendule correspondant à une élongation, la vitesse d'allongement b doit être égale à: $\sqrt{\frac{gl}{\xi}}$.

Le premier membre de l'équation (13) est la fonction cylindrique d'indice *deux:* $J_2(2\sqrt{x})$. Si donc il existait une table de cette fonction, on aurait immédiatement les quantités ξ. A défaut d'une pareille table on peut se servir de celles de J_0 et de J_1 qui se trouvent, par exemple, à la fin de l'ouvrage de LOMMEL *Studien über die Bessel'schen Functionen* et chercher, par tâtonnement, pour quelles valeurs de x l'on a, en vertu de (12):

$$\frac{1}{\sqrt{x}} J_1(2\sqrt{x}) = J_0(2\sqrt{x})$$

ou bien, en remplaçant $2\sqrt{x}$ par z:

$$2J_1(z) = zJ_0(z). \tag{14}$$

Deux circonstances viennent faciliter le calcul. D'abord, la connaissance expérimentale que l'on a du mouvement du pendule indique que chaque élongation se trouve comprise entre deux passages par la verticale, et que, par suite, chaque racine, $\frac{\xi^2}{4}$, de l'équation (14) est intercalée entre deux racines de J_1. On conçoit même que $\frac{\xi^2}{4}$ ne saurait s'écarter beaucoup de la moyenne des deux racines de J_1 qui l'encadrent (au moins tant que la longueur est assez grande vis-à-vis de la vitesse d'allongement): on sait ainsi dans quelles régions des tables doit être effectuée la recherche. En second lieu, la fonction J_1 passe par un maximum ou un minimum vers le milieu de l'intervalle de deux racines consécutives: elle varie alors très-lentement, de telle façon que, dans un premier aperçu, le premier membre de l'équation (12) peut être regardé comme constant pour chaque région. Après avoir ainsi obtenu une valeur grossière de chaque racine $\frac{\xi^2}{4}$, il ne reste plus qu'à procéder par interpolation.

En opérant ainsi, j'ai trouvé que, de 0 à 20 (les tables ne vont pas plus loin), il y a cinq racines de (14), qui sont:

(15) 5,14 8,41 11,62 14,80 17,96.

Je néglige les décimales qui suivent la seconde.

Ceci posé, considérons, par exemple, un pendule ayant un mètre de

longueur à l'instant initial. Pour que ce pendule, légèrement écarté de la verticale et abandonné sans impulsion, suive le mouvement défini par l'équation (10), il faut et il suffit que la vitesse d'allongement $\sqrt{\frac{g}{\xi}}$, exprimée en mètres par seconde, ait l'une des valeurs suivantes:

$$1^m,22 \qquad 0^m,74 \qquad 0^m,54 \qquad 0^m,42 \qquad 0^m,35, \text{ etc.}$$

Adoptons, par exemple, $0^m,35$, et supposons ici, pour plus de commodité, que le pendule, au lieu de s'allonger, aille en se raccourcissant, ce qui ne change rien aux calculs précédents. Les élongations successives correspondront aux valeurs de l comprises dans la formule:

$$l = \frac{b^2}{g}\xi = \frac{b^2}{4g}z^2 = 0{,}00313z^2, \tag{16}$$

z désignant l'une des racines (15). On trouve ainsi les longueurs:

$$1^m \qquad 0^m,68 \qquad 0^m,42 \qquad 0^m,22 \qquad 0^m,08,$$

et, comme le pendule se raccourcit de $0^m,35$ par seconde, les instants de ces élongations sont:

$$0^{sec} \qquad 0^{sec},94 \qquad 1^{sec},66 \qquad 2^{sec},23 \qquad 2^{sec},63.$$

Au bout de $2^{sec},86$, la longueur du pendule devient nulle. A ce moment, il n'y a pas, à proprement parler, une élongation: car la vitesse angulaire ne tend pas vers zéro en même temps que la longueur du pendule. Si nous convenons néanmoins de faire figurer cette position limite au tableau d'ensemble, nous pouvons dire que les intervalles de temps séparant les positions limites successives sont:

$$0^{sec},94 \qquad 0^{sec},72 \qquad 0^{sec},57 \qquad 0^{sec},40 \qquad 0^{sec},23.$$

Calculons encore l'amplitude des élongations. Cette amplitude est mesurée par les valeurs maxima de θ. Or on a, pour ces maxima:

$$\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{\sqrt{x}J_1(2\sqrt{x})}{\frac{b^2}{g}x} = \frac{2g}{b^2}\frac{J_1(z)}{z} = \frac{g}{b^2}J_0(z).$$

D'ailleurs, l'angle d'écart initial peut être pris arbitrairement (pourvu qu'il soit très petit), à cause de la constante arbitraire par laquelle peut être multiplié φ. Il suffit donc de comparer les valeurs de $J_0(z)$ correspondant aux valeurs de z comprises dans le tableau (15). Ces valeurs sont:

$$-0,130 \qquad +0,072 \qquad -0,040 \qquad +0,027 \qquad -0,021.$$

Pour l'écart correspondant à la longueur nulle, il faut chercher directement la limite du rapport $\frac{2J_1(z)}{z} = \frac{J_1(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \frac{\varphi(x)}{x}$. Cette limite est égale à l'unité.

D'après cela, si l'on désigne par θ_0 l'amplitude initiale qui correspond à $z = 17,96$, les écarts successifs ont pour valeur:

$$+\theta_0 \qquad -1,27\theta_0 \qquad +1,86\theta_0 \qquad -3,45\theta_0 \qquad +6,19\theta_0 \qquad -47,62\theta_0.$$

On doit en conclure que l'hypothèse des oscillations infiniment petites ne reste admissible, dans le voisinage de la longueur nulle, que si l'écart initial est extrêmement faible.

Les positions verticales du pendule sont fournies par les racines, autres que zéro, de l'équation $J_1 = 0$. Ces racines sont:

$$19,61 \qquad 16,47 \qquad 13,32 \qquad 10,17 \qquad 7,01 \qquad 3,83.$$

Elles correspondent, en vertu de (16), aux longueurs:

$$1^m,21 \qquad 0^m,85 \qquad 0^m,55 \qquad 0^m,32 \qquad 0^m,15 \qquad 0^m,04.$$

Pour réaliser le mouvement supposé, on peut, la vitesse d'allongement étant de $0^m,35$ par seconde et le pendule descendant d'abord suivant la verticale, donner à ce pendule un petit choc latéral à l'instant où il atteint l'une des longueurs ainsi calculées: les passages successifs par la verticale feront alors connaître les racines de $J_1(z)$. De là un procédé mécanique assez curieux pour obtenir les racines de cette fonction en dehors des limites de la table. D'après ce qui précède, la même expérience fournirait: par la mesure des longueurs correspondant aux élongations, les racines de J_2, et, par la mesure des élongations elles-mêmes, les valeurs de J_0 correspondant aux racines de J_2.

Considérons maintenant le cas général où les données initiales sont incompatibles avec la solution (10). De cette solution particulière, on peut, par un procédé bien connu, déduire l'intégrale générale de l'équation (9), qui est, avec deux constantes arbitraires A et B:

$$u = A\varphi + B\varphi\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\varphi^2}. \tag{17}$$

La dérivée est:

$$u' = A\varphi' + \frac{B}{\varphi} + B\varphi'\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\varphi^2}. \tag{18}$$

L'on a, par suite:

$$\varphi u' - \varphi' u = B \tag{19}$$

et aussi:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{\varphi}\right) = \frac{B}{\varphi^2}. \tag{20}$$

Prenons pour valeur initiale x_0 une quantité qui n'annule pas $\varphi(x)$, et soient α, β $(\alpha < \beta)$ les deux racines consécutives de $\varphi(x)$ comprenant entre elles x_0. L'équation (10) montre que, dans l'intervalle de α à β, la fonction $\frac{u}{\varphi}$ varie toujours dans le même sens: elle ne peut donc avoir qu'une racine dans cet intervalle. Cette racine, si elle existe, annule u: car φ est toujours fini; il est aisé de voir qu'elle existe réellement. Cherchons en effet vers quelle valeur tend la fonction u quand x tend vers β. Le terme $A\varphi$ tend vers zéro. La quantité $\varphi\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\varphi^2}$, si on l'écrit:

$\dfrac{\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\varphi^2}}{\frac{1}{\varphi}}$, se présente sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$: sa vraie valeur est: $\lim.\dfrac{\frac{1}{\varphi^2}}{-\frac{\varphi'}{\varphi^2}} = -\frac{1}{\varphi'_\beta}$.

Si φ'_β était nul, β serait une racine multiple de φ. Mais une pareille circonstance ne peut se produire: car l'équation $x\dfrac{d^2\varphi}{dx^2}+\varphi=0$, différentiée indéfiniment, donnerait alors pour φ et pour toutes ses dérivées des valeurs nulles; la fonction φ, essentiellement holomorphe, serait identiquement nulle. La limite de u, pour $x=\beta$, est donc finie et égale à $-\dfrac{B}{\varphi'_\beta}$. On verrait de même que, pour $x=\alpha$, cette limite est: $-\dfrac{B}{\varphi'_\alpha}$. Or, d'après le théorème de Rolle, les deux racines consécutives, α et β, de φ, donnent à φ' des signes contraires. Il est établi par là que u s'annule dans l'intervalle de ces deux racines, et nous savons déjà que u ne peut s'annuler qu'une fois.

L'interprétation mécanique de ce résultat est immédiate: u étant égal à θl, chaque fois que θ s'annule il en est de même de u et réciproquement (le cas de la longueur nulle étant mis de côté). D'autre part, la fonction φ s'annule en même temps que $J_1(2\sqrt{x})$ ou, ce qui revient au même: $J_1\left(2\dfrac{\sqrt{gl}}{b}\right)$. Donc:

Si z_1 et z_2 désignent deux racines consécutives quelconques de l'équation $J_1(z)=0$, le pendule, en passant de la longueur $l=\dfrac{b^2}{4g}z_1^2$ à la longueur $l=\dfrac{b^2}{4g}z_2^2$, prend une fois, et une seule, la position verticale.

La formule (17) n'est applicable que pour l'intervalle α, β dans lequel se trouve comprise la valeur initiale x_0; mais on peut établir une autre formule qui n'est pas soumise à la même restriction. L'intégration par parties donne:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\varphi^2}=\int_{x_0}^{x}\frac{1}{\varphi'}\cdot\frac{\varphi' dx}{\varphi^2}=\frac{1}{\varphi_0\varphi'_0}-\frac{1}{\varphi\cdot\varphi'}-\int_{x_0}^{x}\frac{\varphi'' dx}{\varphi\cdot\varphi'^2}$$

et, comme $\varphi'' x=-\varphi$, il vient:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\varphi^2}=\frac{1}{\varphi_0\varphi'_0}-\frac{1}{\varphi\varphi'}+\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x\varphi'^2},$$

d'où:

$$u = \left(A + \frac{B}{\varphi_0 \varphi_0'}\right)\varphi - \frac{B}{\varphi} + B\varphi \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x\varphi'^2}\cdot$$

ou bien encore, en remplaçant la constante $A + \frac{B}{\varphi_0 \varphi_0'}$ par C:

$$u = C\varphi - \frac{B}{\varphi} + B\varphi \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x\varphi'^2}\cdot \tag{21}$$

Sous cette forme, la dérivée est:

$$u' = C\varphi' + B\varphi' \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x\varphi'^2} \tag{22}$$

et l'on a encore:

$$u'\varphi - u\varphi' = B.$$

La formule (21) est applicable, à partir d'une valeur initiale quelconque, dans l'intervalle de deux racines consécutives de φ', c'est-à-dire de $J_0(2\sqrt{x})$. Voici, dès lors, comment il faut procéder pour avoir la représentation analytique du mouvement. Partant d'une valeur initiale x_0, on détermine, au moyen des données, comme nous le verrons plus loin, les constantes A, B, C qui figurent dans les équations (17) et (21). Supposons, pour fixer les idées, que x aille en croissant et atteigne une racine β de φ avant d'atteindre une racine de φ'. Pour $x > \beta$, la formule (17) cesse d'être applicable, et il faut lui substituer la formule analogue:

$$u = A'\varphi + B\varphi \int_{x_1}^{x} \frac{dx}{\varphi^2}, \tag{17'}$$

dans laquelle la constante A a pris une nouvelle valeur, A', en même temps qu'on remplaçait x_0 par un nombre x_1 plus grand que β mais plus petit que la racine de φ' immédiatement supérieure à β. La constante B n'a pas changé. Comme la formule (21) continue provisoirement à être valable, il suffit, pour déterminer A', d'identifier les valeurs de u

fournies par les équations (21) et (17'). Le résultat est immédiat si l'on se reporte à la relation $C = A + \frac{B}{\varphi_0 \varphi'_0}$, et l'on trouve:

$$A' - A = B\left(\frac{1}{\varphi_0 \varphi'_0} - \frac{1}{\varphi_1 \varphi'_1}\right).$$

Lorsque x, continuant à croître, dépasse une racine de φ', la formule (21) doit être à son tour modifiée; il faut écrire:

$$(21') \qquad u = C'\varphi - \frac{B}{\varphi'} + B\varphi \int_{x_2}^{x} \frac{dx}{x\varphi'^2},$$

x_2 étant plus grand que α', mais plus petit que la racine de φ immédiatement supérieure à α'. La nouvelle constante, C', est liée à C par l'équation:

$$C' - C = B\left(\frac{1}{\varphi_2 \varphi'_2} - \frac{1}{\varphi_0 \varphi'_0}\right).$$

En marchant ainsi de proche en proche, on parvient sans peine au résultat général que voici:

Dans l'intervalle de deux racines consécutives, λ et μ, de la fonction φ, le mouvement est représenté par l'équation:

$$u = A\varphi + B\varphi\left(\frac{1}{\varphi_0 \varphi'_0} - \frac{1}{\varphi_k \varphi'_k}\right) + B\varphi \int_{x_k}^{x} \frac{dx}{\varphi^2},$$

x_k étant un nombre arbitrairement choisi entre λ et μ.

Dans l'intervalle de deux racines consécutives, λ' et μ', de la dérivée φ', le mouvement est représenté par l'équation

$$u = C\varphi + B\varphi\left(\frac{1}{\varphi_h \varphi'_h} - \frac{1}{\varphi_0 \varphi'_0}\right) - \frac{B}{\varphi'} + B\varphi \int_{x_h}^{x} \frac{dx}{x\varphi'^2},$$

x_h étant un nombre arbitrairement choisi entre λ' et μ'.

Rappelons que dans ces formules, il faut remplacer u par θl, x par $\frac{g}{b^2} l$, $\varphi(x)$ par $\sqrt{x} J_1(2\sqrt{x})$ et enfin $\varphi'(x)$ par $J_0(2\sqrt{x})$.

Il nous reste à dire comment, connaissant les données initiales, c'est-à-dire les valeurs de θ, $\frac{d\theta}{dt}$ et l, à l'origine du temps, on peut calculer les constantes A, B, C. Pour $t = 0$, la formule $l = a + bt$ donne $l = a$. Soit θ_0 la valeur de θ au même instant, et soit ω_0 celle de $\frac{d\theta}{dt}$. Si l'on fait $x = x_0$ dans les formules (17) et (18), il vient:

$$u_0 = A\varphi_0, \qquad u'_0 = A\varphi'_0 + \frac{B}{\varphi_0}.$$

Or:

$$u_0 = a\theta_0 \quad \text{et} \quad u'_0 = \left(\frac{du}{dx}\right)_0 = \frac{b^2}{g}\theta_0 + \frac{ab}{g}\omega_0.$$

D'après cela:

$$A = a\frac{\theta_0}{\varphi_0}, \qquad B = \frac{b}{g}\varphi_0(b\theta_0 + a\omega_0) - a\varphi'_0\theta_0.$$

En outre la formule: $C = A + \frac{B}{\varphi_0\varphi'_0}$ donne:

$$C = \frac{b}{g}\cdot\frac{b\theta_0 + a\omega_0}{\varphi'_0}.$$

Si φ_0 et φ'_0 sont tous les deux différents de zéro, il n'y a aucune difficulté. Si φ_0 est nul, A se présente sous forme infinie ou indéterminée, suivant que θ_0 est ou n'est pas différent de zéro. Il faut alors abandonner momentanément la formule (17) et se servir de la formule (21). Si c'est φ'_0 qui est nul la formule (17) est applicable et la formule (21) doit être momentanément mise de côté. Dans tous les cas, l'une des deux formules subsiste et permet de calculer, pour un instant voisin du premier, les valeurs de θ et de ω. On prendra ensuite ce nouvel état pour état initial, de manière à avoir des valeurs finies, à la fois pour A et pour C. En résumé, le problème se trouve complètement résolu.

Ajoutons qu'une fois la constante B connue, la formule (19) fait immédiatement connaître, sans intégration, une série de valeurs de u: à savoir celles qui correspondent aux racines de $\varphi = 0$. On a en effet, pour chacune de ces racines: $u = -\frac{B}{\varphi'}$.

Examinons enfin ce qui arrive lorsque x tend vers zéro, et, à cet effet, reprenons la formule (17) en choisissant pour x_0 un nombre inférieur à la plus petite racine non nulle de la fonction $\varphi = \sqrt{x}J_1(2\sqrt{x})$, c'est-à-dire au nombre $\frac{(3,83)^2}{4} = 3,66$. La formule va rester applicable depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = 0$. Si l'on pose $\varphi = Mx$, l'on peut écrire:

$$\varphi\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\varphi^2} = \varphi\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{M^2x^2}.$$

La fonction M, égale à l'unité pour $x = 0$, reste finie et différente de zéro dans l'intervalle considéré. Si donc on désigne par p une quantité différente de zéro, on peut écrire:

$$\varphi\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\varphi^2} = \frac{\varphi}{p^2}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x^2} = \frac{\varphi}{p^2}\left[\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x}\right].$$

Faisant tendre ensuite x vers zéro, il vient:

$$\lim_{x=0}\left[\varphi\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\varphi^2}\right] = -\lim\frac{1}{p^2} = -\frac{1}{q^2}. \qquad (q \lessgtr 0)$$

D'après cela, la limite de u, pour $x = 0$, est égale à $-\frac{B}{q^2}$, quantité finie et différente de zéro. Et, comme l'angle θ est égal à $\frac{u}{l}$, c'est-à-dire à $\frac{g}{b^2}\frac{u}{x}$, on voit que cet angle augmente au delà de toute limite quand la longueur du pendule tend vers zéro. Mais ce résultat est incompatible avec l'hypothèse des oscillations infiniment petites: la solution générale (17) ne peut donc convenir que pour des longueurs de pendule qui ne soient pas trop petites. Tout ce qu'on est en droit d'affirmer, c'est que l'amplitude des oscillations tend à s'exagérer énormément à mesure que la longueur décroît. Nous avions déjà observé ce fait en étudiant le mouvement spécial représenté par la formule (10); mais alors l'amplitude, tout en s'exagérant, conservait un rapport fini avec l'amplitude initiale, et par conséquent on pouvait toujours choisir celle-ci assez petite pour

atteindre la longueur nulle avec une amplitude inférieure à une limite donnée quelconque. Dans le cas général, il est impossible, d'après ce que nous venons de voir, d'assigner une pareille limite, au moins quand on s'en tient à la première approximation qui nous occupe pour l'instant.

L'emploi des fonctions J_0 et J_1, fort commode tant que l'argument $2\sqrt{x}$ est inférieur à 20, devient plus pénible au delà de cette limite, puisque les tables ne vont pas plus loin. On a alors la ressource de recourir aux séries (10) et (11); mais ces séries sont elles-mêmes d'autant moins rapidement convergentes que l'argument a une plus grande valeur. Il est vrai que Hansen a fait connaître des développements de $J_0(z)$ et $J_1(z)$ procédant suivant les puissances négatives de z. Sans insister à cet égard, je vais maintenant écrire sous forme d'intégrale définie la solution générale de l'équation (9). Par des considérations analytiques sur lesquelles il est inutile de s'étendre ici, on trouve:

$$(18)\qquad u = Cx\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\sqrt{x}\cos\omega + \alpha)\sin^2\omega\, d\omega + \sin\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2\sqrt{x}\operatorname{tg}\omega}\frac{d\omega}{\cos^3\omega}\right],$$

avec deux constantes arbitraires C et α. La vérification se fait sans difficulté. Si l'on pose:

$$v = x\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\sqrt{x}\cos\omega + \alpha)\sin^2\omega\, d\omega$$

et:

$$w = x\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2\sqrt{x}\operatorname{tg}\omega}\frac{d\omega}{\cos^3\omega},$$

d'où: $u = C(v + w\sin\alpha)$, on trouve:

$$x\frac{d^2v}{dx^2} + v = -\frac{\sqrt{x}}{2}\sin\alpha$$

et

$$x\frac{d^2w}{dx^2} + w = \frac{\sqrt{x}}{2}.$$

On a donc bien: $x\dfrac{d^2u}{dx^2} + u = 0.$

Cette solution a l'avantage d'échapper aux difficultés que nous avons eu précédemment à discuter en rencontrant les racines de J_0 et de J_1, et de fournir, par une seule formule, la représentation complète du mouvement. En introduisant explicitement θ et l, et en remplaçant C par $\frac{b^2}{g}k$, il vient:

$$(19) \qquad \theta = k \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(2\frac{\sqrt{gl}}{b}\cos\omega + \alpha\right)\sin^2\omega\, d\omega + \sin\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2\frac{\sqrt{gl}}{b}\operatorname{tg}\omega} \frac{d\omega}{\cos^3\omega} \right|.$$

Quand l tend vers zéro, la seconde intégrale augmente indéfiniment; la première tend vers $\cos\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\omega\, d\omega$, c'est-à-dire vers $\frac{\pi}{4}\cos\alpha$. La condition nécessaire et suffisante pour que l'angle θ reste fini quand la longueur devient nulle est donc que l'angle α soit nul. Or nous avons vu précédemment que la solution particulière représentée (à un facteur constant près) par la série (10) est la seule pour laquelle θ jouisse de cette propriété. Nous pouvons en conclure la relation:

$$\varphi = Cx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\sqrt{x}\cos\omega)\sin^2\omega\, d\omega.$$

Pour $x = 0$, le rapport $\frac{\varphi}{x}$ tend vers l'unité tandis que l'intégrale tend vers $\frac{\pi}{4}$: la constante C qui figure dans cette égalité est donc égale à $\frac{4}{\pi}$.

La formule (18) se prête bien à l'étude du cas limite pour lequel x est très petit. Comme $x = \frac{gl}{b^2}$, ce cas se réalise, quelle que soit la vitesse d'allongement ou de raccourcissement b, lorsque le pendule approche de la longueur nulle, et il se rencontre également, quelle que soit la longueur initiale, pourvu que la vitesse b ait une grandeur considérable: on trouverait, par exemple, de cette manière, le mouvement d'un pendule qui, après avoir oscillé avec une longueur constante d'un mètre, est subitement soumis à un raccourcissement de dix mètres par seconde. Lorsque

x tend vers zéro, la première intégrale tend, nous venons de le dire, vers $\frac{\pi}{4}\cos\alpha$. D'autre part, si l'on pose $\operatorname{tg}\omega = \lambda$, il vient:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2\sqrt{x}\operatorname{tg}\omega}\frac{d\omega}{\cos^3\omega} = \int_0^\infty e^{-2\lambda\sqrt{x}}(1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}d\lambda.$$

Soit a un nombre fixe, supérieur à l'unité, et considérons séparément les deux intervalles d'intégration compris de 0 à a et de a à ∞. L'intégrale prise de 0 à a tend vers la limite $\int_0^a (1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}d\lambda$, qui est égale à $\frac{1}{2}[a\sqrt{1+a^2} + \log(a+\sqrt{1+a^2})]$. Dans l'intégrale prise depuis a jusqu'à ∞, on peut, λ étant supérieur à l'unité, écrire:

$$(1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}} = \lambda\left(1+\frac{1}{\lambda^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \lambda\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{\lambda^2}-\frac{1}{8}\frac{1}{\lambda^4}+\ldots\right)$$

d'où:

$$\int_a^\infty e^{-2\lambda\sqrt{x}}(1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}d\lambda = \int_a^\infty e^{-2\lambda\sqrt{x}}\lambda d\lambda + \frac{1}{2}\int_a^\infty e^{-2\lambda\sqrt{x}}\frac{d\lambda}{\lambda}$$

$$+\int_a^\infty e^{-2\lambda\sqrt{x}}d\lambda\left(-\frac{1}{8\lambda^3}+\frac{1}{16\lambda^5}-\ldots\right).$$

La dernière intégrale du second membre est inférieure, en valeur absolue, à $\frac{1}{8}\int_a^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^3}$, c'est-à-dire à $\frac{1}{16a^2}$. D'autre part, on a:

$$\int_a^\infty e^{-2\lambda\sqrt{x}}\lambda d\lambda = \frac{e^{-2a\sqrt{x}}(1+2a\sqrt{x})}{4x}$$

et:

$$\int_a^\infty e^{-2\lambda\sqrt{x}}\frac{d\lambda}{\lambda} = \int_{2a\sqrt{x}}^\infty e^{-p}\frac{dp}{p} = \int_{2a\sqrt{x}}^h e^{-p}\frac{dp}{p} + \int_h^\infty e^{-p}\frac{dp}{p}. \qquad (h > 2a\sqrt{x})$$

L'intégrale $\int_h^\infty e^{-p}\frac{dp}{p}$ est inférieure à $\frac{1}{h}\int_h^\infty e^{-p}dp$, c'est-à-dire à $\frac{e^{-h}}{h}$, quantité fixe si h est lui-même un nombre fixe.

Reste enfin l'intégrale $\int_{2a\sqrt{x}}^h e^{-p}\frac{dp}{p}$, pour laquelle on peut écrire:

$$\int_{2a\sqrt{x}}^h e^{-p}\frac{dp}{p} = \int_{2a\sqrt{x}}^h \frac{dp}{p}\left(1 - p + \frac{p^2}{1.2} - \dots\right)$$

$$= \log h - \log(2a\sqrt{x}) - h + 2a\sqrt{x} + \int_{2a\sqrt{x}}^h dp\left(\frac{p}{1.2} - \frac{p^2}{1.2.3} + \dots\right).$$

Il suffit de supposer h inférieur à 3 pour avoir:

$$\int_{2a\sqrt{x}}^h dp\left(\frac{p}{1.2} - \frac{p^2}{1.2.3} + \dots\right) < \int_{2a\sqrt{x}}^h \frac{p\,dp}{2}.$$

c'est-à-dire $< \frac{h^2}{4} - a^2x$.

En résumé, l'on voit que, lorsque x tend vers zéro, le rapport $\frac{u}{Cx}$, calculé au moyen de la formule (18), est égal à un nombre fini, dont on peut aisément assigner une limite supérieure, augmenté de la quantité indéfiniment croissante: $\sin\alpha\left[\frac{e^{-2a\sqrt{x}}(1 + 2a\sqrt{x})}{4x} - \frac{1}{4}\log x\right]$.

En développant $e^{-a\sqrt{x}}$, on peut encore réduire la partie indéfiniment croissante à la forme plus simple: $\frac{\sin\alpha}{4}\left[\frac{1}{x} - \log x\right]$.

On déduit de là, pour l'expression de θ en fonction de la longueur l:

$$\theta = k\sin\alpha\left[F + \frac{b^2}{4gl} + \frac{1}{4}\log\frac{b^2}{gl}\right],$$

F désignant une fonction finie. La constante k dépend de l'état initial.

Si l'on part d'une longueur donnée, un mètre par exemple, et d'une vitesse angulaire nulle, k est proportionnel à l'amplitude initiale. Si donc cette amplitude est assez faible pour que la fonction $\frac{k \sin \alpha}{4}\left[\frac{b^2}{gl} + \log\frac{b^2}{gl}\right]$ conserve une très petite valeur tant que $\frac{gl}{b^2}$ dépasse un très petit nombre fixe ε, (condition essentielle pour que l'hypothèse des oscillations infiniment petites puisse être maintenue), le mouvement du pendule, dans le voisinage de la longueur $l = \varepsilon\frac{b^2}{g}$, sera approximativement représenté par l'équation:

$$\theta = \frac{k \sin \alpha}{4}\left(\frac{b^2}{gl} + \log\frac{b^2}{gl}\right).$$

Tout ceci suppose que $\sin \alpha$ n'est pas nul: dans le cas contraire, on est ramené, comme nous l'avons vu, au mouvement simple représenté par la formule (10).

On peut également se demander ce que devient la loi du mouvement quand x acquiert une très grande valeur, circonstance qui finit toujours par se produire, avec un pendule de longueur croissante, au bout d'un laps de temps suffisant. Sans entrer ici dans la recherche directe de la valeur asymptotique vers laquelle tend alors le second membre de l'équation (18), je vais vérifier que le mouvement final peut être représenté au moyen de l'équation approchée:

$$(20) \qquad u = Ax^p \cos(2\sqrt{x}) + Bx^p \sin(2\sqrt{x}),$$

A et B désignant deux constantes, et l'exposant p étant pris égal à $\frac{1}{4}$. Considérons en effet l'expression:

$$v = x^p \cos(2\sqrt{x}).$$

On a:

$$\frac{dv}{dx} = px^{p-1}\cos(2\sqrt{x}) - x^{p-\frac{1}{2}}\sin(2\sqrt{x})$$

et

$$\frac{d^2v}{dx^2} = [p(p-1)x^{p-2} - x^{p-1}]\cos 2\sqrt{x} - \left(2p - \frac{1}{2}\right)x^{p-\frac{2}{3}}\sin(2\sqrt{x}).$$

On voit que, si $p = \frac{1}{4}$, il reste simplement:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\left(\frac{3}{16}x^{p-2} + x^{p-1}\right)\cos 2\sqrt{x}$$

d'où:

$$x\frac{d^2v}{dx^2} + v = -\frac{3}{16}x^{p-1}\cos 2\sqrt{x} = -\frac{3}{16}\frac{v}{x}.$$

De même, si l'on pose: $w = x^p \sin(2\sqrt{x})$, on trouve:

$$x\frac{d^2w}{dx^2} + w = -\frac{3}{16}\frac{w}{x}.$$

Il s'ensuit que la fonction u, définie par l'équation (20), vérifie rigoureusement l'équation différentielle:

$$x\frac{d^2u}{dx^2} + u = -\frac{3}{16}\frac{u}{x}$$

ou bien:

$$x\frac{d^2u}{dx^2} + \left(1 + \frac{3}{16x}\right)u = 0$$

qui se réduit à l'équation (9) quand on néglige $\frac{3}{16x}$ en présence de l'unité.

Les constantes A et B se déterminent aisément quand on connait l'état initial, pourvu que celui-ci soit donné à un instant pour lequel x est déjà très grand. La relation entre θ et l est:

$$(21) \qquad \theta = \left(\frac{g}{b^2}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{A\cos\left(\frac{2}{b}\sqrt{gl}\right) + B\sin\left(\frac{2}{b}\sqrt{gl}\right)}{l^{\frac{3}{4}}}.$$

Elle peut évidemment, par l'introduction de deux nouvelles constantes, R et φ, être mise sous la forme:

$$(22) \qquad \theta = Rl^{-\frac{3}{4}}\sin\left(\frac{2}{b}\sqrt{gl} - \varphi\right).$$

Les passages par la verticale s'obtiennent en écrivant la condition:

$$(23) \qquad \frac{2}{b}\sqrt{gl} - \varphi = \lambda\pi,$$

λ étant un entier quelconque, d'où:

$$l = \frac{b^2}{4g}(\varphi + \lambda\pi)^2.$$

Si l'on prend deux passages consécutifs, pour lesquels λ ait les valeurs m et $m + 1$, l'accroissement de longueur dans cet intervalle est égal à $\frac{b^2}{4g}[(\varphi + \overline{m+1}\,\pi)^2 - (\varphi + m\pi)^2]$, c'est-à-dire à $\pi\frac{b^2}{4g}[2\varphi + (2m+1)\pi]$, et, comme le pendule s'allonge avec la vitesse b, le laps de temps séparant ces deux passages est égal à $\pi\frac{b}{4g}[2\varphi + (2m+1)\pi]$, ou bien encore à $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \frac{\pi}{2(\varphi + m\pi)}\right]$, c'est-à-dire à $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\pi b}{4\sqrt{gl}}\right)$ ou enfin à $\pi\sqrt{\frac{l}{g}} + \frac{\pi^2 b}{4g}$. Dans cette expression, l désigne la longueur du pendule à l'instant du premier passage. La durée de l'oscillation se trouve donc, par l'effet de l'allongement, augmentée de la quantité $\pi^2\frac{b}{4g}$, indépendante de la longueur l.

Ce résultat peut être mis sous une forme plus élégante si l'on introduit, en même temps que la longueur l à l'instant du premier passage, la longueur l' à l'instant du second. En négligeant $\frac{\pi^2}{4}\frac{b^2}{gl}$ en présence de l'unité, on a évidemment la relation:

$$l' = l + \pi b\sqrt{\frac{l}{g}}$$

d'où:

$$\frac{l + l'}{2} = l + \frac{\pi b}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

La durée de l'oscillation d'un pendule ordinaire, de longueur $\frac{l + l'}{2}$, serait donc: $\pi\sqrt{\frac{l + l'}{2g}} = \pi\sqrt{\frac{l}{g} + \frac{\pi b}{2g}\sqrt{\frac{l}{g}}} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\pi b}{4\sqrt{gl}}\right)$. D'après cela:

L'intervalle de temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs d'un pendule lentement variable par la verticale est sensiblement égal à la durée de l'oscillation d'un pendule ordinaire, ayant pour longueur constante la longueur moyenne du pendule variable dans cet intervalle de temps.

Les élongations sont déterminées par la condition d'annuler $\frac{d\theta}{dt}$, ou, ce qui revient au même, $\frac{d\theta}{dl}$, θ étant lié à l par l'équation (22). On trouve ainsi:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{2}{b}\sqrt{gl}-\varphi\right)=\frac{4}{3}\frac{\sqrt{gl}}{b}.$$

D'après l'hypothèse, le second membre est ici très-grand; l'arc $\frac{2}{b}\sqrt{gl}-\varphi$ diffère donc très peu d'un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$, et l'on a, en confondant cette petite différence avec sa tangente:

$$(24)\qquad \frac{2}{b}\sqrt{gl}-\varphi=(2\lambda+1)\frac{\pi}{2}-\frac{3b}{4\sqrt{gl}},$$

λ désignant un très-grand entier. Considérons les longueurs l et l'' qui correspondent à un passage par la verticale et à l'élongation consécutive. Les formules (23) et (24) donnent:

$$\frac{4g}{b^2}(l''-l)=\left[\lambda\pi+\varphi+\frac{\pi}{2}-\frac{3b}{4\sqrt{gl''}}\right]^2-(\lambda\pi+\varphi)^2$$

ou:

$$\frac{4g}{b^2}(l''-l)=2(\lambda\pi+\varphi)\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3b}{4\sqrt{gl''}}\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3b}{4\sqrt{gl''}}\right)^2$$

ou bien, en négligeant $\frac{b^2}{gl}$ dans le second membre, ce qui permet de remplacer $\frac{1}{\sqrt{l''}}$ par $\frac{1}{\sqrt{l}}\left(1-\frac{\pi}{4}\frac{b}{\sqrt{gl}}\right)$,

$$\frac{4g}{b^2}(l''-l)=\frac{4\sqrt{gl}}{b}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3b}{4\sqrt{gl}}\right)+\frac{\pi^2}{4}.$$

Le temps $\frac{l''-l}{b}$ qui sépare les deux instants considérés a donc pour valeur:

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}-\frac{3}{4}\frac{b}{g}+\frac{\pi^2}{16}\frac{b}{g}.$$

En résumé:

L'intervalle de temps qui s'écoule entre un passage par la verticale et l'élongation consécutive est sensiblement égal à:

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}+\frac{\pi^2-12\,b}{16}\,\frac{b}{g}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}-0,13\frac{b}{g}$$

l désignant la longueur du pendule à l'instant du passage par la verticale.

On remarque que la durée de la demi-oscillation ascendante est légèrement diminuée par le fait de l'allongement, tandis qu'il y a augmentation dans la durée de l'oscillation. L'accroissement de durée porte donc exclusivement sur la demi-oscillation descendante: ceci, en supposant que la comparaison est faite avec le pendule ordinaire ayant comme longueur la plus petite longueur du pendule variable dans l'intervalle de temps considéré. Si la comparaison était faite en employant la plus grande longueur, les résultats seraient changés: le raccourcissement de durée de la demi-oscillation ascendante atteindrait $\frac{3\pi^2+12\,b}{16}\,\frac{b}{g}$, et la demi-oscillation descendante présenterait elle-même un léger raccourcissement, égal à $\frac{\pi^2-12\,b}{16}\,\frac{b}{g}$.

Si, au lieu d'un pendule qui s'allonge, on avait affaire à un pendule qui se raccourcit, le sens du mouvement serait renversé: il suffirait, dans ce qui précède, de substituer le mot »descendante» au mot »ascendante» et réciproquement.

Quant à l'amplitude des oscillations, elle se déduit de la comparaison des formules (22) et (24). Pour une élongation quelconque, l'amplitude est proportionnelle en valeur absolue à $\frac{\cos\left(\frac{3b}{4\sqrt{gl}}\right)}{l^{\frac{3}{4}}}$. Continuant à négliger le carré de $\frac{b}{\sqrt{gl}}$, nous trouvons simplement $\frac{1}{l^{\frac{3}{4}}}$. Deux élongations successives, correspondant aux longueurs l et l', sont donc dans le rapport $\left(\frac{l'}{l}\right)^{\frac{3}{4}}$. Mais $l'=l+b\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, donc $\left(\frac{l'}{l}\right)^{\frac{3}{4}}=1+\frac{3}{4}\pi\sqrt{\frac{b}{gl}}$. Par suite:

La différence d'amplitude de deux élongations successives θ et θ', est sensiblement égale à $\frac{3}{4}\pi\sqrt{\frac{b}{gl}}$; cette différence tend vers zéro à mesure que la longueur augmente.

La formule (22) peut être transformée de manière à exprimer l'angle θ en fonction du temps: il suffit d'y remplacer l par sa valeur $a + bt$, ce qui donne:

$$\theta = R(a + bt)^{-\frac{3}{4}} \sin\left(\frac{2}{b}\sqrt{g(a + bt)} - \varphi\right),$$

ou bien, en posant: $\sqrt{\frac{g}{a}} = \gamma$ et $\frac{b}{\sqrt{ga}} = p$:

$$\theta = Ra^{-\frac{3}{4}}(1 + p\gamma t)^{-\frac{3}{4}} \sin\left(\frac{2}{p}\sqrt{1 + p\gamma t} - \varphi\right).$$

Si la longueur initiale a est assez grande et si l'intervalle de temps t est assez petit pour qu'on puisse négliger $p^2\gamma^2t^2$ en présence de $p\gamma t$, il vient, en remplaçant la constante $Ra^{-\frac{3}{4}}$ par ρ:

$$\theta = \rho\left(1 - \frac{3}{4}p\gamma t\right) \sin\left(\frac{2}{p} + \gamma t - \frac{1}{4}p\gamma^2t^2 - \varphi\right).$$

Remplaçons encore $\frac{2}{p} - \varphi$ par une nouvelle constante ψ et continuons à négliger les puissances de $p\gamma t$ supérieures à la première. Nous pouvons alors écrire:

$$(25) \qquad \theta = \rho\left(1 - \frac{3}{4}p\gamma t\right) \sin(\gamma t - \psi) - \frac{\rho p\gamma^2t^2}{4} \cos(\gamma t - \psi).$$ [1]

---

[1] Dans la note communiquée le 15 janvier 1894 à l'Académie des sciences, j'ai donné la formule: $\theta = \rho\left(1 - \frac{3}{4}k\gamma t\right) \sin(\gamma t - \omega) + \rho\frac{k}{8}(1 - \gamma^2t^2) \cos(\gamma t - \omega)$ qui, à première vue, ne parait pas concorder avec la formule (25). Mais il suffit, après avoir remplacé k par son équivalent p, d'établir entre les constantes arbitraires ψ et ω la relation: $\omega = \psi + \frac{p}{8}$ et de négliger les termes d'ordre p^2 pour trouver un résultat identique. Il n'y a donc, au fond, de différence que dans le choix de l'origine du temps.

Si l'on suppose qu'à l'instant initial le pendule soit vertical, ψ est un multiple de π: on peut prendre $\psi = 0$ et il reste simplement:

$$\theta = \rho\left(1 - \frac{3}{4}p\gamma t\right)\sin\gamma t - \frac{\rho p \gamma^2 t^2}{4}\cos\gamma t. \tag{26}$$

La discussion de cette formule est aisée, et conduit à dresser le tableau suivant:

	Valeur du temps.
Première position verticale	$0,$
Première élongation positive	$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} + \frac{1}{16}(\pi^2 - 12)\frac{b}{g},$
Deuxième position verticale	$\pi\sqrt{\frac{a}{g}} + \frac{\pi^2}{4}\frac{b}{g},$
Première élongation négative	$\frac{3\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} + \frac{1}{16}(9\pi^2 - 12)\frac{b}{g},$
Troisième position verticale	$2\pi\sqrt{\frac{a}{g}} + \pi^2\frac{b}{g},$ etc.

Tous les calculs qui précèdent supposent qu'on traite le nombre $\frac{b}{\sqrt{ga}}$ comme une quantité infiniment petite. On peut pousser l'approximation beaucoup plus loin, en recourant à une autre méthode que je vais maintenant indiquer.

Reprenons l'équation fondamentale (9), et remplaçons-y la variable x par sa valeur $\frac{g}{b^2}l$ ou $\frac{g}{b^2}(a + bt)$, ce qui, avec les notations adoptées, peut s'écrire: $\frac{1}{p^2}(1 + p\gamma t)$.

Il vient ainsi:

$$(1 + p\gamma t)\frac{d^2u}{dt^2} + \gamma^2 u = 0. \tag{27}$$

Imaginons que u soit développé en série ordonnée suivant les puissances entières et positives de la petite quantité p:

$$u = u_0 + u_1 p + u_2 p^2 + \dots + u_n p^n + \dots$$

et limitons-nous provisoirement au terme $u_n p^n$. Si nous substituons dans l'équation (27), le premier membre devient un polynôme en p, de degré $\overline{n+1}$, et nous pouvons profiter de l'indétermination des fonctions u_0, $u_1, \ldots, u_{n-1}$ pour annuler dans ce polynome les coefficients des diverses puissances de p, depuis la puissance 0 jusqu'à la puissance $\overline{n-1}$. Il restera ensuite une équation servant à calculer u_n. On trouve de cette manière:

$$u_0'' + \gamma^2 u_0 = 0,$$

$$u_1'' + \gamma^2 u_1 = -\gamma t u_0'',$$

$$u_2'' + \gamma^2 u_2 = -\gamma t u_1'',$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$u_{n-1}'' + \gamma^2 u_{n-1} = -\gamma t u_{n-2}'',$$

$$(1 + p\gamma t)u_n'' + \gamma^2 u_n = -\gamma t u_{n-1}''.$$

Pour achever la détermination des fonctions auxiliaires, convenons que toutes ces fonctions, ainsi que leurs dérivées premières, s'annulent à l'instant initial, exception faite de u_0 et de u_0', qui devront, à cet instant, prendre les valeurs, supposées connues, de u et de u'. Il vient:

$$u_0 = A \sin\gamma t + B\cos\gamma t,$$

$$u_1 = \cos\gamma t \int_0^t u_0'' t \sin\gamma t\,dt - \sin\gamma t \int_0^t u_0'' t \cos\gamma t\,dt,$$

$$u_2 = \cos\gamma t \int_0^t u_1'' t \sin\gamma t\,dt - \sin\gamma t \int_0^t u_1'' t \cos\gamma t\,dt,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_{n-1} = \cos\gamma t \int_0^t u_{n-2}'' t \sin\gamma t\,dt - \sin\gamma t \int_0^t u_{n-2}'' t \cos\gamma t\,dt$$

et l'on se procure ainsi, de proche en proche, par des quadratures aisées à effectuer, les valeurs de $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$. Toute la difficulté de l'intégration est reportée sur la fonction u_n. Mais, si l'on néglige le terme $p\gamma t u_n''$ en présence de u_n'', on a simplement:

$$u_n = \cos\gamma t \int_0^t u_{n-1}'' t \sin\gamma t\,dt - \sin\gamma t \int_0^t u_{n-1}'' t \cos\gamma t\,dt;$$

avec une erreur relative qui est du même ordre que $p\gamma t$: il en résultera, pour u, une erreur dont l'expression contient en facteur p^{n+1}.

On pourrait discuter complètement les conditions de convergence de la série obtenue en prolongeant indéfiniment la répétition du même procédé; mais cette discussion manquerait d'intérêt pratique, à cause de la longueur rebutante des calculs nécessaires pour former explicitement u_n, dès que l'indice n devient un peu considérable. Je me bornerai donc, pour terminer ce chapitre, à donner la valeur de u calculée en tenant compte de la seconde puissance de p. En vue de simplifier, j'admets qu'à l'instant initial le pendule est vertical, ce qui entraîne la condition $B = 0$, d'où $u_0 = A \sin \gamma t$, et je fais $A = 1$, sauf à rétablir ensuite ce facteur constant. On trouve, dans ces conditions:

$$(28) \qquad u = \sin \gamma t + \frac{p\gamma t}{4}(\sin \gamma t - \gamma t \cos \gamma t)$$
$$+ \frac{p^2}{32}[(2\gamma^3 t^3 - 3\gamma t)\cos \gamma t + (3 - 3\gamma^2 t^2 - \gamma^4 t^4)\sin \gamma t].$$

Il est aisé de s'assurer que cette expression vérifie l'équation (27), pourvu qu'on néglige les termes de l'ordre p^3. Comme application, calculons l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs par la verticale, le premier passage étant celui qui correspond à $t = 0$. Il suffit de chercher pour quelle valeur de γt, voisine de π, s'annule le second membre de l'équation (28). En posant: $\gamma t = \pi + \varepsilon$, il vient:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{p\gamma t}{4} \frac{\gamma t + \frac{p}{8}(3 - 2\gamma^2 t^2)}{1 + \frac{p\gamma t}{4} + \frac{p^2}{32}(3 - 3\gamma^2 t^2 - \gamma^4 t^4)}.$$

Cette formule montre d'abord que $\operatorname{tg}\varepsilon$ est du même ordre que p: la différence $\operatorname{tg}\varepsilon - \varepsilon$ est donc de l'ordre p^3, et doit être négligée. En remplaçant dans le second membre γt par $\pi + \varepsilon$ et négligeant encore p^3, on a:

$$\varepsilon = \frac{p}{4}(\pi + \varepsilon)\frac{\pi + \varepsilon + \frac{p}{8}(3 - 2\pi^2)}{1 + \frac{p\pi}{4}} = \frac{p}{4}(\pi + \varepsilon)\left[\pi + \varepsilon + \frac{p}{8}(3 - 2\pi^2)\right]\left(1 - \frac{p\pi}{4}\right)$$

ou bien encore:

$$\varepsilon = \frac{p}{4}\left[\pi^2 + \frac{\pi p}{8}(3 - 2\pi^2) + 2\pi\varepsilon - \frac{p\pi^3}{4}\right] = \frac{p}{4}\left[\pi^2 + \frac{3p\pi}{8} - \frac{p\pi^3}{2} + 2\pi\varepsilon\right],$$

d'où:

$$\varepsilon = \frac{p}{4}\frac{\pi^2 + \frac{3p\pi}{8} - \frac{p\pi^3}{2}}{1 - \frac{p\pi}{2}} = \frac{p}{4}\left(\pi^2 + \frac{3p\pi}{8}\right).$$

Il vient alors:

$$\gamma t = \pi + \frac{p\pi^2}{4} + \frac{3p^2\pi}{32},$$

ou bien, en remplaçant γ par $\sqrt{\frac{g}{a}}$ et p par $\frac{b}{\sqrt{ag}}$:

$$t = \pi\sqrt{\frac{a}{g}} + \frac{\pi^2}{4}\frac{b}{g} + \frac{3\pi}{32}\frac{b^2}{g\sqrt{ag}}.$$

Ainsi que nous l'avons déjà fait au premier degré d'approximation, comparons cette durée de l'oscillation avec celle de l'oscillation d'un pendule ayant une longueur constante l, égale à la longueur moyenne atteinte à l'instant $\frac{t}{2}$. On a: $l = a + b\frac{t}{2}$, d'où

$$\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}\left[1 + \frac{bt}{4a} - \frac{b^2t^2}{32a^2}\right].$$

En effectuant, on trouve:

$$\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \pi\sqrt{\frac{a}{g}} + \frac{\pi^2}{4}\frac{b}{g} + \frac{7\pi^3}{32}\frac{b^2}{g\sqrt{ag}}.$$

D'après cela:

La durée de l'oscillation du pendule moyen est un peu supérieure à celle de l'oscillation du pendule variable; la différence est égale à $\frac{\pi(7\pi^2 - 3)}{32}\frac{b^2}{g\sqrt{ag}}$, *c'est-à-dire à* $6,47\frac{b^2}{g\sqrt{ag}}$.

Pour déduire de la formule (28) l'angle d'écart θ en fonction du temps, il reste à remplacer u par θl, c'est-à-dire par $\theta a(1 + p\gamma t)$. En

effectuant, au degré d'approximation adopté, et négligeant un facteur commun constant, on trouve sans peine:

$$(29) \qquad \theta = \sin\gamma t - \frac{p\gamma t}{4}(3\sin\gamma t + \gamma t\cos\gamma t)$$

$$+ \frac{p^2}{32}[(10\gamma^3t^3 - 3\gamma t)\cos\gamma t + (3 - 43\gamma^2t^2 - \gamma^4t^4)\sin\gamma t].$$

III.

Etude des oscillations finies.

Quand les oscillations ont une amplitude trop grande pour que l'angle d'écart puisse être à chaque instant confondu avec son sinus, la difficulté du problème s'accroît singulièrement. Si l'on cherche à intégrer par un développement en série l'équation différentielle du mouvement, mise par exemple sous la forme (6), on se heurte à des calculs inextricables, et il ne parait guère possible d'obtenir la forme du terme général. Aussi nous contenterons-nous d'examiner deux cas limites: ceux où la longueur du pendule varie soit très vite, soit très lentement.

Considérons d'abord un pendule dont le fil se raccourcit uniformément avec une très grande vitesse, de telle façon qu'en prenant comme unité de temps la seconde, le rapport $\frac{g}{b} = s$ ait une très petite valeur numérique.

L'équation du mouvement:

$$(a - bt)\frac{d^2\theta}{dt^2} - 2b\frac{d\theta}{dt} + g\sin\theta = 0$$

dans laquelle nous mettons en évidence le signe de b, peut, en divisant par b et posant $\frac{a}{b} - t = z$, se mettre sous la forme:

$$(30) \qquad z\frac{d^2\theta}{dz^2} + 2\frac{d\theta}{dz} + s\sin\theta = 0.$$

Supposons θ développé en série suivant les puissances positives de s, et négligeons les puissances supérieures à la seconde. Alors:

$$\theta = u + vs + ws^2,$$

u, v, w étant trois fonctions inconnues. En substituant dans l'équation (30) et continuant à négliger s^3, il vient:

$$z(u'' + v''s + w''s) + 2(u' + v's + w's) + s(\sin u + vs \cos u) = 0.$$

Egalons séparément à zéro les coefficients des diverses puissances de s, ce qui donne:

$$u''z + 2u' = 0,$$

$$v''z + 2v' = -\sin u,$$

$$w''z + 2w' = -v \cos u.$$

Enfin convenons que, pour la valeur initiale $z = z_0 = \frac{a}{b}$, correspondant à $t = 0$, les fonctions v et w doivent être nulles ainsi que leurs dérivées premières. Nous pouvons alors écrire, en appelant α et β deux constantes arbitraires et intégrant les équations précédentes:

$$u = \alpha + \frac{\beta}{z},$$

$$v = -\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{z^2} \int_{z_0}^{z} z \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{z}\right) dz,$$

$$w = +\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{z^2} \int_{z_0}^{z} z \cos\left(\alpha + \frac{\beta}{z}\right) dz \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{z^2} \int_{z_0}^{z} z \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{z}\right) dz.$$

Le calcul est ainsi ramené à une suite de quadratures. Ces quadratures, impossibles à effectuer dans le cas général, deviennent au contraire très aisées dans le cas particulier où la constante β est égale à zéro, ce qui revient à supposer que la dérivée u' est constamment nulle. Comme, par hypothèse, u' est égal à θ' pour $t = 0$, on voit que ce cas se réalise quand le pendule a une vitesse angulaire nulle à l'instant initial. On trouve:

$$(31) \qquad \theta = \alpha - \frac{s \sin \alpha}{2z}(z - z_0)^2 + \frac{s^2 \sin 2\alpha}{12}\left[\frac{(z - z_0)(z^2 - 5zz_0 - 2z_0^2)}{2z} + 3z_0^2 \log \frac{z}{z_0}\right].$$

Cette formule n'est applicable en toute sécurité que pour les valeurs de z qui ne sont pas trop petites, c'est-à-dire quand le pendule est encore assez éloigné de la longueur nulle. Si l'on néglige le terme en s^2 et si l'on remplace z par sa valeur $\frac{l}{b}$ en fonction de la longueur l du pendule, on a une relation de la forme:

$$\theta = A + Bl + \frac{C}{l}$$

où A, B, C désignent trois constantes: c'est l'équation polaire approximative de la trajectoire de l'extrémité du pendule.

Considérons maintenant un pendule qui s'allonge ou se raccourcit avec une très grande lenteur. Pour préciser, nous supposerons qu'il y a allongement, et que le nombre $\frac{b}{\sqrt{ga}}$ est très petit: nous avons déjà fait remarquer que cette dernière circonstance finit toujours par se réaliser, puisqu'on peut alors prendre une longueur initiale a aussi grand qu'on le veut. Il est naturel de procéder comme on le fait en astronomie pour l'étude des mouvements troublés: c'est-à-dire d'avoir recours à la méthode de la variation des constantes. Posons, pour abréger:

$$u = \sqrt{\frac{g}{a}}\, t, \qquad p = \frac{b}{\sqrt{ga}},$$

L'équation (3) prend la forme:

$$\frac{d^2\theta}{du^2} + \sin\theta + p\left[u\frac{d^2\theta}{du^2} + 2\frac{d\theta}{du}\right] = 0. \tag{32}$$

En négligeant d'abord complètement le terme qui contient p en facteur, il reste l'équation:

$$\frac{d^2\theta}{du^2} + \sin\theta = 0 \tag{33}$$

qui représente le mouvement d'un pendule ordinaire, de longueur a. L'intégrale générale de l'équation (33) peut s'écrire:

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \operatorname{tg}\frac{\theta_0}{2}\operatorname{cn}(u + C) \tag{34}$$

avec deux constantes arbitraires, θ_0 et C, dont la première est égale à l'angle d'écart maximum. Le *cosinus amplitude* qui figure ici doit être pris avec le module $k = \sin\frac{\theta_0}{2}$. En désignant, suivant l'usage, par k' le module complémentaire $\sqrt{1-k^2}$ et résolvant par rapport à θ, il vient:

$$(35) \qquad \theta = 2 \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{k}{k'}\operatorname{cn}(u+C)\right].$$

La vérification est facile: en remplaçant $u + C$ par v, on a, d'après des formules connues:

$$\frac{d\theta}{du} = -\frac{2kk' \operatorname{sn} v \operatorname{dn} v}{k'^2 + k^2 \operatorname{cn}^2 v}, \qquad \frac{d^2\theta}{du^2} = -\frac{2kk' \operatorname{cn} v}{\operatorname{dn}^2 v}$$

et:

$$\sin\theta = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2kk' \operatorname{cn} v}{\operatorname{dn}^2 v}$$

d'où:

$$\frac{d^2\theta}{du^2} + \sin\theta = 0.$$

L'expression (35) de θ renferme deux constantes k et C. Considérons ces deux quantités comme des fonctions de u, qu'il s'agit de déterminer de manière à vérifier l'équation (32). Si l'on s'impose la condition:

$$(36) \qquad \frac{\partial\theta}{\partial k}\frac{dk}{du} + \frac{\partial\theta}{\partial C}\frac{dC}{du} = 0$$

l'on a:

$$\frac{d\theta}{du} = \frac{\partial\theta}{\partial u},$$

$$\frac{d^2\theta}{du^2} = \frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial k}\frac{dk}{du} + \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial C}\frac{dC}{du}.$$

Substituant, et remarquant que la somme $\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \sin\theta$ est identiquement nulle, on trouve:

$$(37)\qquad \frac{dk}{du} = \frac{p}{1+pu}\,\frac{\left(2\frac{\partial\theta}{\partial u} + u\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}\right)\frac{\partial\theta}{\partial C}}{\frac{\partial\theta}{\partial C}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial k} - \frac{\partial\theta}{\partial k}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial C}},$$

$$\frac{dC}{du} = -\frac{p}{1+pu}\,\frac{\left(2\frac{\partial\theta}{\partial u} + u\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}\right)\frac{\partial\theta}{\partial k}}{\frac{\partial\theta}{\partial C}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial k} - \frac{\partial\theta}{\partial k}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial C}}.$$

La fonction θ, qui sert ainsi à déterminer $\frac{dk}{du}$ et $\frac{dC}{du}$, est fournie par l'équation (35): elle dépend uniquement de k et de $u + C$; par conséquent les dérivées $\frac{\partial\theta}{\partial C}$, $\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial C}$ sont identiques à $\frac{\partial\theta}{\partial u}$, $\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}$. Le problème se trouve en définitive ramené à l'intégration de deux équations simultanées du premier ordre, où les inconnues sont k et C; mais la petitesse supposée du paramètre p permet de faire un pas de plus. On voit en effet qu'en laissant de côté les valeurs particulières pour lesquelles le déterminant $\frac{\partial\theta}{\partial C}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial k} - \frac{\partial\theta}{\partial k}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial C}$ approcherait de zéro, les dérivées $\frac{dk}{du}$, $\frac{dC}{du}$ sont elles-mêmes très petites: d'où il résulte que k et C varient très lentement. On peut donc, dans les seconds membres, qui contiennent déjà p en facteur, négliger les variations des inconnues, du moins tant que u reste compris dans des limites assez étroites. Le problème ne dépend plus dès lors que de deux quadratures: si l'on veut, on peut, après avoir ainsi obtenu des valeurs approchées de k et de C, les substituer dans les seconds membres pour passer à une seconde, puis à une troisième approximation, etc.

Malheureusement, ces quadratures ne paraissent guère calculables: la solution est donc plutôt théorique que pratique. Nous allons voir comment il est possible de parvenir à une solution effective, au moins quand l'amplitude des oscillations n'est pas excessive.

A cet effet, considérons d'abord la fonction $\theta = 2 \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{k}{k'}\operatorname{cn} u\right)$, qui vérifie rigoureusement, comme nous l'avons vu, l'équation (33) du pendule ordinaire, et cherchons les premiers termes de son développement en série suivant les puissances entières et croissantes du module k. En tenant compte de k^3 et négligeant k^4, on trouve successivement:

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = \int_0^{\varphi} d\varphi\left(1 + \frac{k^2}{2}\sin^2\varphi\right) = \varphi + \frac{k^2}{4}(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi),$$

$$\varphi = \operatorname{am} u = u - \frac{k^2}{4}(u - \sin u \cos u),$$

$$\operatorname{cn} u = \cos\operatorname{am} u = \cos u + \frac{k^2}{4}\sin u(u - \sin u \cos u),$$

$$\frac{k}{k'}\operatorname{cn} u = k\left(1 + \frac{k^2}{2}\right)\left[\cos u + \frac{k^2}{4}\sin u(u - \sin u\cos u)\right]$$

$$= k\left[\cos u + \frac{k^2}{2}\cos u + \frac{k^2}{4}\sin u(u - \sin u \cos u)\right],$$

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{k}{k'}\operatorname{cn} u\right) = k\cos u + \frac{k^3}{2}\cos u + \frac{k^3}{4}\sin u(u - \sin u\cos u) - \frac{k^3}{3}\cos^3 u,$$

$$\theta = 2k\cos u + k^3\cos u + \frac{k^3}{2}\sin u(u - \sin u \cos u) - \frac{2k^3}{3}\cos^3 u,$$

$$\theta = 2k\cos u + \frac{k^3}{6}(3\cos u + 3u\sin u - \cos^3 u).$$

Mais

$$\cos^3 u = \frac{\cos 3u + 3\cos u}{4}.$$

Donc enfin:

$$(38) \quad \theta = 2k\cos u + \frac{k^3}{24}[9\cos u + 12u\sin u - \cos 3u] = 2k\cos u + \frac{k^3}{24}f(u)$$

en posant pour abréger:

$$f(u) = 9\cos u + 12u\sin u - \cos 3u.$$

L'erreur commise est de l'ordre k^4, c'est-à-dire $\sin^4\frac{\theta_0}{2}$. Supposons par exemple $\theta_0 = 20°$, ce qui représente déjà une oscillation très notable: alors k^4 serait égal à 0,00091, inférieur par conséquent à $\frac{1}{1000}$. Pour un pendule oscillant de 180°, c'est-à-dire atteignant l'horizontale à chacune de ses élongations, on n'aurait encore pour k^4 que la valeur 0,25.

Revenons à l'équation (32), et, pour l'intégrer, posons $\theta = \omega + p\varepsilon$, en admettant d'une part que p^2 est négligeable, d'autre part que la quantité ω est égale à l'angle θ de la formule (38), et vérifie par conséquent l'équation (33). Il vient ainsi:

$$\frac{d^2\varepsilon}{du^2} + \varepsilon \cos\omega = F(u) \tag{39}$$

en posant:

$$F(u) = -\left(u\frac{d^2\omega}{du^2} + 2\frac{d\omega}{du}\right).$$

L'équation (39) est une équation linéaire, du second ordre, par rapport à ε. Si l'on remplace ω par sa valeur $2k\cos u + \frac{k^3}{24}f(u)$ et si l'on continue à négliger k^4, l'on a:

$$\frac{d^2\varepsilon}{du^2} + (1 - 2k^2\cos^2 u)\varepsilon = Ak + Bk^3 \tag{40}$$

avec les notations:

$$A = 2u\cos u + 4\sin u,$$

$$B = -\frac{1}{24}(uf''u + 2f'u).$$

Introduisons quatre fonctions auxiliaires $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, en posant:

$$\varepsilon = \alpha + k\beta + k^2\gamma + k^3\delta,$$

fonctions que nous assujettirons à s'annuler, ainsi que leurs dérivées premières, pour la valeur particulière $u = 0$; puis, après avoir substitué cette valeur de ε dans l'équation (40), annulons séparément les coefficients des puissances de k, jusqu'à la troisième inclusivement (la quatrième étant toujours regardée comme négligeable). Nous avons:

$$\alpha'' + \alpha = 0,$$

$$\beta'' + \beta = A,$$

$$\gamma'' + \gamma = 2\alpha\cos^2 u,$$

$$\delta'' + \delta = B + 2\beta\cos^2 u.$$

On voit d'abord qu'en vertu de l'hypothèse $\alpha = \alpha' = 0$, pour $u = 0$ la fonction α est identiquement nulle, et qu'il en est de même, par suite, de γ. On a donc simplement à calculer β et δ au moyen des deux équations:

$$\beta'' + \beta = A,$$

$$\delta'' + \delta = B + 2\beta\cos^2 u$$

et à prendre ensuite:

$$\varepsilon = k\beta + k^3\delta.$$

Le calcul de β conduit à la valeur:

$$\beta = \frac{u^2\sin u - 3u\cos u + 3\sin u}{2}.$$

On en déduit:

$$2\beta\cos^2 u = \frac{u^2+3}{4}(\sin u + \sin 3u) + \frac{3u}{4}(\cos 3u + 3\cos u).$$

D'autre part, de la relation:

$$f(u) = 9\cos u + 12u\sin u - \cos 3u$$

on tire:

$$B = -\frac{1}{24}(uf''u + 2f'u)$$

$$= -\frac{1}{24}[-12u^2\sin u + 39u\cos u + 6\sin u + 9u\cos 3u + 6\sin 3u].$$

Donc:

$$\delta'' + \delta = \frac{3}{4}u^2\sin u + \frac{5}{8}u\cos u + \frac{1}{2}\sin u + \frac{1}{4}u^2\sin 3u + \frac{3}{8}u\cos 3u + \frac{1}{2}\sin 3u.$$

Pour intégrer cette équation, il suffit de former la somme des intégrales correspondant aux divers termes du second membre; on choisira ensuite les constantes arbitraires de manière à avoir $\delta = \delta' = 0$ pour $u = 0$. Le résultat est:

$$32\delta = -4u^3\cos u + 11u^2\sin u - u\cos u - u^2\sin 3u - 3u\cos 3u + 4\sin u.$$

Finalement, les oscillations d'un pendule lentement variable sont représentées par la formule:

$$(41)\qquad \theta = 2k\cos u + \frac{k^3}{24}(9\cos u + 12u\sin u - \cos 3u)$$

$$+ \frac{pk}{2}(u^2\sin u - 3u\cos u + 3\sin u)$$

$$+ \frac{pk^3}{32}(-4u^3\cos u + 11u^2\sin u - u\cos u - u^2\sin 3u - 3u\cos 3u + 4\sin u).$$

Je rappelle que k désigne le sinus de la moitié de l'angle d'écart initial; p, le nombre, supposé très petit, $\frac{b}{\sqrt{ga}}$, et u, la variable $\sqrt{\frac{g}{a}}\,t$. Cette formule donne $\frac{d\theta}{dt} = 0$ pour $t = 0$: elle suppose donc que la vitesse angulaire est nulle à l'instant initial. Le terme $2k\cos u$ correspond aux oscillations infiniment petites du pendule ordinaire; le terme multiplié par $\frac{k^3}{24}$ représente la correction nécessaire pour tenir compte du fait que les oscillations sont finies. Les termes multipliés par $\frac{pk}{2}$ et par $\frac{pk^3}{32}$ font connaître l'influence perturbatrice de l'allongement.

Quand on néglige k^3, la formule (41) doit devenir équivalente à la formule (25). Il est aisé de vérifier en effet que, si l'on remplace dans cette dernière γt par u et ψ par $\frac{3p}{4} - \frac{\pi}{2}$, et si l'on continue à traiter p comme un infiniment petit, il vient:

$$\theta = \rho\cos u + \frac{p\rho}{4}(u^2\sin u - 3u\cos u + 3\sin u).$$

L'identité a donc lieu en prenant $\rho = 2k$.

Comme application de la formule (41), cherchons quelle est la durée d'une demi-oscillation, depuis l'élongation correspondant à l'origine du temps jusqu'au passage suivant par la verticale. Si l'on fait $u = \frac{\pi}{2}$, on trouve aisément:

$$\theta_{\frac{\pi}{2}} = k^3\frac{\pi}{4} + \frac{pk}{2}\left(\frac{\pi^2}{4} + 3\right) + \frac{pk^3}{32}(3\pi^2 + 4)$$

et:

$$\frac{d\theta}{dt}_{\frac{\pi}{2}} = \gamma \frac{d\theta}{du}_{\frac{\pi}{2}} = \gamma\left[-2k + \frac{5kp\pi}{4} + \frac{pk^3}{32}\left(\frac{\pi^2}{4} + 8\pi\right)\right].$$

La valeur $u = \frac{\pi}{2}$ correspond à l'instant $t = \frac{\pi}{2\gamma}$, ou $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}$. A cet instant, le pendule, pour atteindre la verticale, a encore à parcourir l'arc $\theta_{\frac{\pi}{2}}$ avec la vitesse négative $\frac{d\theta}{dt}_{\frac{\pi}{2}}$. La durée de la demi-oscillation est donc égale à:

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} - \left(\frac{\theta}{\frac{d\theta}{dt}}\right)_{\frac{\pi}{2}}.$$

En faisant le calcul, dans les conditions d'approximation déjà convenues, on trouve:

$$(42) \qquad T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\left(1 + \frac{k^2}{4}\right) + \frac{b}{4g}\left(\frac{\pi^2}{4} + 3\right) + \frac{bk^2}{16g}(2\pi^2 + 1).$$

En remplaçant k, c'est-à-dire $\sin\frac{\theta_0}{2}$, par l'arc $\frac{\theta_0}{2}$, ce qui est évidemment permis puisque k n'intervient ici que par son carré, on peut encore écrire:

$$(42') \qquad T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right) + \frac{b}{4g}\left(\frac{\pi^2}{4} + 3\right) + \frac{b\theta_0^2}{64g}(2\pi^2 + 1).$$

Précédemment, en négligeant p^2, nous avons trouvé le temps:

$$T' = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} + \frac{\pi^2 - 12}{16}\frac{b}{g},$$

l désignant la longueur à l'instant du passage par la verticale, pris pour instant initial. Ici, nous trouvons en négligeant également p^2:

$$T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} + \frac{\pi^2 + 12}{16}\frac{b}{g}.$$

Si l'on veut établir la concordance de ces deux résultats, il faut se placer dans des conditions identiques, c'est-à-dire considérer la demi-oscillation

pour laquelle la longueur du pendule est a à l'instant de l'élongation, et l à l'instant du passage par la verticale. Ceci oblige à renverser le sens de l'un des deux mouvements et à écrire, par exemple:

$$T' = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} - \frac{\pi^2 - 12}{16}\frac{b}{g}.$$

Puis il faut poser: $l = a + bT = a + \frac{\pi b}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}$ d'où:

$$T' = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}\left(1 + \frac{\pi b}{2\sqrt{ag}}\right)} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\left(1 + \frac{\pi b}{4\sqrt{ag}}\right) - \frac{\pi^2 - 12}{16}\frac{b}{g},$$

$$T' = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} + \frac{\pi^2 + 12}{16}\frac{b}{g}.$$

On a donc bien l'égalité $T = T'$.

IV.

Pendule conique.

Les équations, en coordonnées rectangulaires, du mouvement d'un pendule conique sont, en continuant à désigner par T la tension et par l la longueur:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + T\frac{x}{l} = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + T\frac{y}{l} = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + T\frac{z}{l} - g = 0.$$

Si l'on pose: $x^2 + y^2 = r^2$, d'où $r^2 + z^2 = l^2$, on a:

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = r\frac{dr}{dt}.$$

D'autre part, le théorème des aires donne:

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c,$$

c étant une constante. On tire de là:

$$(x^2 + y^2)\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] = c^2 + r^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

ou:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{c^2}{r^2} + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2.$$

On a aussi:

$$x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = r\frac{d^2r}{dt^2} + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

et par suite:

$$x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} = r\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{c^2}{r^2}.$$

Mais:

$$x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + T\frac{r^2}{l} = 0.$$

On est ainsi conduit aux deux équations:

$$\frac{d^2r}{dt^2} + T\frac{r}{l} - \frac{c^2}{r^3} = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + T\frac{z}{l} - g = 0$$

qui, par l'élimination de la tension, donnent:

$$r\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2r}{dt^2} - gr + \frac{c^2z}{r^3} = 0.$$

Soit maintenant θ l'écart du pendule par rapport à la verticale. On a évidemment:

$$r = l\sin\theta,$$

$$z = l\cos\theta,$$

$$z\frac{d^2r}{dt^2} - r\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(l^2\frac{d\theta}{dt}\right),$$

et par suite:

$$\frac{d}{dt}\left(l^2\frac{d\theta}{dt}\right) + gl\sin\theta - \frac{c^2\cos\theta}{l^2\sin^3\theta} = 0. \tag{43}$$

Pour définir complètement le mouvement, il faut encore exprimer, en fonction du temps, l'angle φ que forme avec un plan vertical fixe le plan vertical mobile qui contient à chaque instant la tige. Cette expression est fournie par le théorème des aires, qui donne:

$$l^2\sin^2\theta\frac{d\varphi}{dt} = c. \tag{44}$$

Si l'on suppose, comme précédemment: $l = a + bt$, l'équation (43) peut s'écrire:

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2b\frac{d\theta}{dt} + g\sin\theta - \frac{c^2\cos\theta}{l^3\sin^3\theta} = 0,$$

ou bien:

$$l\frac{d^2\theta}{dl^2} + 2\frac{d\theta}{dl} + \frac{g}{b^2}\sin\theta - \frac{c^2\cos\theta}{b^2l^3\sin^3\theta} = 0.$$

Nous nous bornerons au cas des oscillations assez petites pour qu'on puisse remplacer $\sin\theta$ par θ et $\cos\theta$ par l'unité (ceci revient à négliger θ^2, tandis que, dans le cas du mouvement plan, il suffisait de négliger θ^3). Remplaçons en outre θ par $\frac{u}{l}$ et $\frac{gl}{b^2}$ par x. Il vient ainsi:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{u}{x} - \frac{b^2c^2}{g^2}\frac{1}{u^3} = 0.$$

Soit enfin $u = v\sqrt{\frac{bc}{g}}$; nous obtenons l'équation très simple, au moins en apparence:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{v}{x} - \frac{1}{v^3} = 0. \tag{45}$$

Soit ω une solution quelconque de cette équation réduite à ses deux premiers termes, c'est-à-dire une solution de l'équation (9), et posons:

$$v = \lambda\omega$$

d'où:

$$\frac{dv}{dx} = \lambda\frac{d\omega}{dx} + \omega\frac{d\lambda}{dx},$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \lambda\frac{d^2\omega}{dx^2} + 2\frac{d\lambda}{dx}\frac{d\omega}{dx} + \omega\frac{d^2\lambda}{dx^2}.$$

En substituant, nous avons:

$$2\frac{d\lambda}{dx}\frac{d\omega}{dx} + \omega\frac{d^2\lambda}{dx^2} = \frac{1}{\lambda^3\omega^3}$$

ou:

$$2\omega^2\frac{d\lambda}{dx}\frac{d}{dx}\left(\omega^2\frac{d\lambda}{dx}\right) = \frac{2}{\lambda^3}\frac{d\lambda}{dx}.$$

L'intégration est immédiate et donne, en appelant A une constante:

$$\left(\omega^2\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \frac{1}{\lambda^2} = A$$

d'où

$$\frac{\lambda\frac{d\lambda}{dx}}{\sqrt{A\lambda^2 - 1}} = \frac{1}{\omega^2}.$$

Soit B une autre constante; une seconde intégration donne:

$$\lambda^2 = \frac{1}{A} + A\left(\int\frac{dx}{\omega^2} + B\right)^2.$$

Donc enfin:

$$v = \sqrt{\frac{\omega^2}{A} + A\omega^2\left(\int\frac{dx}{\omega^2} + B\right)^2}.$$

Telle est l'intégrale générale de l'équation (45). Pour interpréter ce résultat, remarquons que les deux fonctions:

$$\omega_1 = \frac{\omega}{\sqrt{A}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{A}\,\omega\left(\int\frac{dx}{\omega^2} + B\right)$$

sont deux intégrales particulières de l'équation (9), intégrales liées par l'unique condition:

$$(46) \qquad \omega_1 \frac{d\omega_2}{dx} - \omega_2 \frac{d\omega_1}{dx} = 1.$$

Si donc ω_1, ω_2 sont deux fonctions vérifiant à la fois les équations (9) et (46), on peut écrire:

$$v = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}.$$

Revenons maintenant aux notations primitives, qui donnent:

$$\theta = \frac{v}{l}\sqrt{\frac{bc}{g}}$$

et soit de même:

$$\theta_1 = \frac{\omega_1}{l}\sqrt{\frac{bc}{g}}, \qquad \theta_2 = \frac{\omega_2}{l}\sqrt{\frac{bc}{g}}.$$

Nous trouvons:

$$(47) \qquad \theta = \sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2}$$

avec les conditions:

$$(48) \qquad \begin{cases} l\dfrac{d^2\theta_1}{dt^2} + 2b\dfrac{d\theta_1}{dt} + g\theta_1 = 0, \\[2ex] l\dfrac{d^2\theta_2}{dt^2} + 2b\dfrac{d\theta_2}{dt} + g\theta_2 = 0, \end{cases}$$

$$(49) \qquad \theta_1 \frac{d\theta_2}{dt} - \theta_2 \frac{d\theta_1}{dt} = \frac{c}{l^2}.$$

Les deux équations (48) montrent que θ_1 et θ_2 sont les angles d'inclinaison de deux pendules plans, de même longueur que le pendule conique. Les équations (47) et (49) prouvent d'ailleurs qu'on peut écrire:

$$\theta_1 = \theta\cos\varphi, \qquad \theta_2 = \theta\sin\varphi,$$

$$l^2\theta^2\frac{d\varphi}{dt} = c.$$

Cette dernière équation est identique, pour le degré d'approximation adopté, avec l'équation (44): la fonction φ a donc dans les deux cas la

même signification, c'est-à-dire qu'elle représente l'angle compris entre un plan fixe et le plan vertical du pendule. Nous concluons de là que θ_1 et θ_2 sont les projections de l'angle θ sur deux plans fixes, verticaux et rectangulaires.

En résumé:

Le mouvement du pendule conique s'obtient en composant les mouvements de deux pendules qui oscillent dans deux plans fixes rectangulaires, suivant les lois précédemment établies.

Ce théorème aurait pu être énoncé immédiatement, en remarquant que traiter l'angle d'écart comme un infiniment petit, c'est confondre la longueur du pendule avec sa projection sur un plan vertical quelconque, d'où il suit que la projection varie uniformément, aussi bien que la longueur elle-même. Mais les calculs qui précèdent vont nous permettre de discuter complètement le problème, au moins dans le cas du pendule lentement variable.

A cet effet, représentons θ_1 et θ_2 au moyen de la formule (25), en attribuant à la phase ψ deux valeurs différentes, ψ_1 et ψ_2. Soient en outre ρ_1 et ρ_2 les deux valeurs de la constante ρ. Nous avons:

$$(50) \qquad \theta_1 = \rho_1\left(1 - \frac{3}{4}p\gamma t\right)\sin(\gamma t - \psi_1) - \frac{\rho_1 p\gamma^2 t^2}{4}\cos(\gamma t - \psi_1),$$

$$\theta_2 = \rho_2\left(1 - \frac{3}{4}p\gamma t\right)\sin(\gamma t - \psi_2) - \frac{\rho_2 p\gamma^2 t^2}{4}\cos(\gamma t - \psi_2).$$

Si nous écrivons que l'équation (49) est vérifiée identiquement après qu'on a remplacé $\frac{1}{\rho^2}$ par $\frac{1}{(a+bt)^2}$, c'est-à-dire par $\frac{1}{a^2}(1 - 2p\gamma t)$, il vient, toutes réductions faites:

$$(51) \qquad \rho_1\rho_2\sin(\psi_1 - \psi_2) = \frac{c}{a^2\gamma} = \frac{c}{\sqrt{g}}a^{-\frac{3}{2}}.$$

Supposons que les deux plans fixes rectangulaires viennent à tourner d'un angle ω autour de leur arête. Les constantes $\rho_1, \rho_2, \psi_1, \psi_2$ prennent de nouvelles valeurs $\rho'_1, \rho'_2, \psi'_1, \psi'_2$, et un calcul élémentaire montre que l'on a:

$$2\rho'_1\rho'_2\cos(\psi'_2 - \psi'_1) = (\rho_2^2 - \rho_1^2)\sin 2\omega + 2\rho_1\rho_2\cos(\psi_2 - \psi_1)\cos 2\omega.$$

Si donc l'angle ω est choisi de manière à avoir $\operatorname{tg} 2\omega = \frac{2\rho_1\rho_2}{\rho_1^2-\rho_2^2}\cos(\psi_2-\psi_1)$, la nouvelle différence de phase est égale à $\frac{\pi}{2}$. D'ailleurs, en choisissant convenablement l'origine du temps, on peut faire en sorte que ψ_2' soit nul, et par conséquent ψ_1' égal à $-\frac{\pi}{2}$. Effaçons en outre les accents, devenus inutiles, de ρ_1' et ρ_2', et, pour abréger, remplaçons γt par u. Dans ces conditions les équations (50) et (51) sont remplacées par les suivantes:

$$(52)\qquad \begin{aligned} \frac{\theta_1}{\rho_1} &= \cos u - \frac{pu}{4}(3\cos u + u\cos u), \\ \frac{\theta_2}{\rho_2} &= \sin u - \frac{pu}{4}(3\sin u + u\sin u), \end{aligned}$$

$$\rho_1\rho_2 = \frac{c}{\sqrt{g}}a^{-\frac{3}{2}}.$$

La dernière détermine la constante des aires en fonction de ρ_1 et ρ_2. Les deux autres font connaître, en fonction du temps, les angles θ_1 et θ_2 ainsi que l'angle φ compris entre le plan fixe des θ_1 et le plan vertical du pendule; car on a, d'après ce qui précède:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\theta_2}{\theta_1}.$$

On peut aussi trouver la courbe tracée par la tige du pendule sur un plan horizontal fixe, mené, par exemple, à la distance 1 du point de suspension. Si les traces des deux plans verticaux sur ce plan horizontal sont prises pour axes des x et des y, les coordonnées de la trace du pendule sont:

$$x = \theta_1, \qquad y = \theta_2$$

et les équations (52) donnent immédiatement, en négligeant p^2:

$$\left(\frac{x}{\rho_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{\rho_2}\right)^2 - 1 = -\frac{3p}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{y}{x}\right).$$

C'est une courbe transcendante, peu différente d'une ellipse. On peut encore dire que la tige rencontre constamment, sur le plan horizontal,

une ellipse qui varie lentement, en restant concentrique et homothétique à elle-même. Les deux axes ont pour valeurs:

$$\rho_1\left[1 - \frac{3p}{4}\operatorname{arc\,tg}\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{y}{x}\right] \quad \text{et} \quad \rho_2\left[1 - \frac{3p}{4}\operatorname{arc\,tg}\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{y}{x}\right].$$

Au bout d'un demi-tour, le rapport d'homothétie est $1 - \frac{3p\pi}{4}$, ce qui concorde avec le résultat trouvé en parlant de l'amplitude des oscillations planes.

Ces conclusions seraient évidemment modifiées si l'on cessait de regarder les oscillations comme infiniment petites. Il est présumable, d'après ce qu'on sait du pendule conique ordinaire, que l'on trouverait alors une ellipse lentement variable, toujours semblable à elle-même, mais tournant autour de son centre. Reculant devant la longueur des calculs, je n'ai pas essayé de vérifier cette supposition.

SUR LES ÉQUATIONS DE LA DYNAMIQUE

PAR

R. LIOUVILLE

à PARIS.

Introduction.

L'Académie des Sciences de Paris avait proposé, comme sujet d'un prix à décerner en 1894, l'étude des intégrales algébriques des équations de la dynamique et particulièrement des intégrales quadratiques. Le travail, que j'avais présenté à ce concours et auquel une mention honorable a été accordée, se composait de deux parties. La première, se rapportant à une certaine interprétation des équations de la dynamique et surtout à l'étude de leurs intégrales quadratiques, est reproduite dans le présent Mémoire, sans autre changement que la suppression de quelques détails, mieux à leur place parmi d'autres recherches.

En ce qui concerne les intégrales quadratiques, je n'ai point fait porter mes efforts sur toutes les catégories dans lesquelles ces intégrales peuvent être rangées.

L'objet principal des premiers paragraphes de ce Mémoire est, au contraire, la définition précise d'une certaine espèce d'intégrales quadratiques, à laquelle celle des forces vives appartient toujours lorsqu'elle existe et qui jouit de propriétés très distinctes.

Le sujet ainsi limité se trouve en liaison étroite avec un autre problème, déja étudié sur certains points par plusieurs auteurs, c'est celui de la conservation des trajectoires. On sait en effet que, dans certains cas, les équations de la dynamique admettent des transformations, différentes de celles qui consistent dans un simple changement des variables

et susceptibles d'être employées sans altération des trajectoires. Le mouvement sur ces trajectoires est en général modifié, mais il peut aussi ne pas l'être et l'on construit sans peine des exemples pour lesquels se produit ce fait assez singulier. Quoiqu'il en soit à cet égard, les problèmes admettant les transformations indiquées font aussi connaître, parmi les intégrales du second degré des équations de la dynamique, des classes douées de caractères spéciaux. Il faut toutefois séparer, dans toute cette question, deux points de vue presque opposés, car on peut faire l'une ou l'autre des deux hypothèses suivantes:

A. 1re *hypothèse.* Les forces sont nulles, ou bien elles dérivent d'un potentiel et l'énergie est une constante donnée; il est bien connu qu'à ces deux conditions répondent des équations de même espèce. L'étude des transformations conservant les trajectoires n'est alors rien autre chose qu'une question relative aux équations différentielles linéaires, à une seule variable; c'est ce que peuvent établir les § 1, 2 et 3 de ce travail et voici la question dont il s'agit:

On donne un système d'équations différentielles linéaires,

$$(1)\qquad \begin{aligned} &dz - \sum_{(h)} z^{(h)} dx_h = 0, \\ &dz^{(i)} + \sum_{(h,k)} p_{i.k}^{(h)} z^{(h)} dx_k = 0, \end{aligned}$$

dans lequel les inconnues sont $z, z^{(1)}, \ldots, z^{(m)}$; les coefficients $p_{i.k}^{(h)}$ sont des fonctions *données* de m variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$, liées elles-mêmes à l'une d'entre elles, par $m-1$ équations qui ne sont pas connues. Comment doivent être choisies les fonctions données $p_{i.k}^{(h)}$, afin que le système linéaire précédent admette une, deux ou plusieurs intégrales, contenant au second degré les inconnues $z^{(h)}$ et indépendantes des liaisons supposées entre les x_i?

Je démontre que, s'il existe une intégrale de cette espèce, il y a un problème de dynamique correspondant aux équations linéaires mentionnées; s'il existe deux intégrales, il y en a m en général, distinctes ou réductibles; chacune d'elles définit un mouvement et, lorsqu'on passe de l'un à l'autre de ceux-ci, les trajectoires ne sont pas changées. De plus, les équations de ces mouvements admettent des intégrales quadratiques, d'ordinaire au nombre de m, (§ 3).

On peut imaginer que le système (1) n'admette aucune intégrale quadratique; cela n'empêche point qu'il lui corresponde des équations différentielles, analogues à celles de la dynamique et, comme elles, s'offrant sans cesse les mêmes, quel que soit le choix des variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Je dirai que ces équations ont *même aspect* que celles de la dynamique; certaines conclusions relatives à ces dernières conviennent aussi aux équations de même aspect, dont la généralité cependant est plus grande. On voit qu'au contraire, les intégrales quadratiques dont il vient d'être question, sont, d'après leur nature même, réservées aux équations de la dynamique proprement dites.

Il serait naturel d'étendre ces recherches en proposant d'attribuer au système (1) une ou plusieurs intégrales linéaires, une ou plusieurs intégrales de degré supérieur à deux;[1] je laisse les intégrales linéaires, pour lesquelles le résultat est simple et sera développé dans une autre occasion; quant à celles de degré supérieur à deux, on serait tenté de penser qu'elles n'existent pas, si l'on n'avait pu former des exemples pour lesquels se présentent m intégrales quadratiques; or celles-ci permettent de construire des intégrales, de degré supérieur à deux et même assez variées. La question est alors de savoir s'il y a, pour le système (1), des intégrales entières, hormis celles qui résultent ainsi des combinaisons de quelques autres, soit linéaires, soit quadratiques. Cela est impossible et la démonstration se fait en quelques mots (§ 4), sous la réserve d'un cas exceptionnel, dont l'examen complet ne m'a pas paru nécessaire en ce moment.

La recherche qui reste à faire est celle des problèmes de dynamique pour lesquels les équations linéaires correspondantes (1) admettent, soit une intégrale linéaire, soit une seconde intégrale quadratique. Sur ce point, voici les résultats contenus dans ce mémoire.

Comme conséquence des relations précédemment établies, j'indique d'abord une solution assez étendue et qui convient quel que soit le nombre des variables x_h. Afin qu'elle se présente, il faut et il suffit que les deux formes quadratiques conjuguées, je veux dire correspondant aux mêmes trajectoires, puissent être simultanément réduites à ne contenir

---

[1] Les équations de la dynamique correspondantes auraient aussi des intégrales de ces mêmes degrés et d'une nature spéciale.

que les carrés des différentielles; il entre, dans les coefficients de ces deux formes, m fonctions arbitraires et chacune de celles-ci dépend d'une variable unique. La solution ainsi trouvée offre une apparente analogie avec l'une de celles qui, liées à l'étude générale des intégrales quadratiques, sont depuis longtemps connues, mais elle en est au fond tout à fait différente et constitue un cas d'intégration nouveau, (§ 5).

Au reste, à toute solution connue du problème, le nombre des variables étant m, correspondent d'autres solutions, pour lesquelles ce nombre est un multiple de m et qui se déduisent de la première sans aucun calcul; ce théorème est l'objet du § 6.

B. 2^{d} *hypothèse.* Dans les problèmes de mécanique considérés, les forces appliquées ne sont pas nulles; ce sont des fonctions quelconques des coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_m$ et, lorsqu'elles dérivent d'un potentiel, la constante de l'énergie doit rester arbitraire. Si l'on veut étudier deux problèmes de cette espèce, différents et pour lesquels les trajectoires soient cependant les mêmes, on rencontre d'abord une proposition, dûe à M. Painlevé: il existe en général, pour chacun des problèmes une intégrale quadratique, (§ 7), une exception toutefois ayant lieu quand, après avoir fait évanouir les forces, les deux systèmes auxquels on parvient sont de la catégorie examinée plus haut, (A).

La démonstration donnée (§ 7) se déduit des seuls éléments dont nous avons déjà fait usage; mais le théorème acquiert par ce moyen une nouvelle signification et un degré de généralité tout différents; c'est ce que je voudrais expliquer ici, car cela est essentiel pour présenter la question sous son jour véritable. J'ai déjà fait observer, au sujet de la première hypothèse, que certains systèmes d'équations différentielles ne sont pas susceptibles de définir l'ensemble des trajectoires dans un problème de mécanique proprement dit, mais offrent cependant le même aspect que les équations de ces trajectoires et jouissent d'une généralité beaucoup plus grande. La même chose a lieu dans le cas actuel et pour les mêmes raisons. L'intégrale quadratique, dont nous avons démontré l'existence, convient à ces problèmes plus généraux que ceux de la mécanique, dans les circonstances mêmes qui étaient admises pour ces derniers; cette existence n'est donc nullement liée, comme elle l'était dans la première hypothèse, à celle d'un véritable problème de mécanique correspondant aux équations étudiées; les deux faits sont au contraire

distincts, bien que sans doute leur réunion puisse motiver des conclusions spéciales.

Il semble certain qu'entre les systèmes d'équations différentielles appartenant à des problèmes de dynamique et les systèmes plus généraux, de même aspect, il y a des rapprochements très nombreux. Le § 8 de ce mémoire est consacré à en indiquer un, presque évident: s'il arrive qu'un problème de dynamique admette une intégrale, rationnelle à l'égard des vitesses, il y a un système, de même aspect, possédant une intégrale entière par rapport à ces mêmes quantités.

J'ajoute que les éléments employés dans toute cette théorie sont susceptibles d'applications assez différentes; c'est ainsi que d'une remarque faite au § 2 résulte, pour tout changement des variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$, le moyen de construire les invariants non pas seulement des équations de la dynamique, mais aussi ceux, bien moins accessibles, des équations de même aspect, soustraites à toute restriction.

La seconde partie du travail que j'avais présenté à l'Académie des Sciences de Paris concernait le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe; ce sera le sujet d'un prochain Mémoire.

CHAPITRE I.

§ 1. *Equations du mouvement, quand il y a une intégrale des forces vives, dont la constante est donnée. Systèmes linéaires associés. Equations du second ordre plus générales que celles de la dynamique.*

Quand un problème de dynamique admet l'intégrale des forces vives, il convient souvent de regarder comme une donnée de la question la valeur de la constante qui représente l'énergie. Le problème posé de cette manière équivaut, on le sait, à celui des géodésiques généralisées, et, comme il est d'une importance et d'une simplicité particulière, c'est à lui que se rapporteront un grand nombre des résultats suivants, notamment

ceux qui font l'objet de ce paragraphe. Si l'on représente par T la demi-somme des forces vives, par $x_1, x_2, \ldots, x_m$, les paramètres, en nombre quelconque, servant à définir la position du système matériel à l'instant considéré, par t le temps compté depuis une origine arbitraire, dans la formule

$$2\,T dt^2 = \sum_{(i,k)} e_{i,k} dx_i dx_k,$$

qui détermine T, les coefficients $e_{i,k}$ sont des fonctions quelconques de $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Les équations du mouvement,

$$\frac{dx_i}{dt} = x'_i, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial x'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} = 0,$$

se développent alors ainsi

$$(1) \qquad \sum_{(k)} e_{i,k} \frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{(h,h')} \left(\frac{\partial e_{i,h'}}{\partial x_h} - \frac{1}{2}\frac{de_{h,h'}}{\partial x_i}\right) \frac{dx_h}{dt}\frac{dx_{h'}}{dt} = 0$$

et leur étude se rattache, comme on le va voir, à celle d'un certain système d'équations différentielles linéaires.

Considérons en effet le système:

$$(2) \qquad \begin{aligned} dz - \sum_{(h)} z^{(h)} dx_h &= 0, \\ dz^{(i)} + \sum_{(h,k)} p_{i,k}^{(h)} z^{(h)} dx_k &= 0, \end{aligned}$$

dont les coefficients sont des fonctions arbitraires des variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$; je suppose ces dernières liées par $m - 1$ relations, qui d'abord ne sont pas données et je regarde $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots, z^{(m)}$ et z comme des inconnues satisfaisant aux équations linéaires (2). La dernière, z, qui joue un rôle prépondérant, nullement influencé d'ailleurs par le choix des variables $x_1, \ldots, x_m$, sera désignée sous le nom d'inconnue *principale;* les autres sont les inconnues *auxiliaires.* J'imagine que l'on veuille, dans les équations (2), isoler l'inconnue principale. Les relations établies entre les x_i étant arbitraires, des différentiations, en général au nombre de m, permettent d'éliminer les inconnues auxiliaires et laissent une équation différentielle, d'ordre m, faisant connaître z. Mais les relations adoptées peuvent être telles que l'ordre de cette équation soit abaissé. Pour qu'il

devienne égal à deux, les variables x_i doivent être assujetties à des conditions, qui les définissent d'une façon complète. En effet de la première égalité (2), on déduit

$$d^2z - \sum_{(i)} dz^{(i)} dx_i - \sum_{(h)} z^{(h)} d^2x_h = 0,$$

ou bien, d'après les égalités du même groupe,

$$d^2z - \sum_{(h)} z^{(h)} \left[d^2x_h - \sum_{(i,k)} p_{i.k}^{(h)} dx_i dx_k\right] = 0 \tag{3}$$

et le résultat cherché sera obtenu pourvu que ces équations différentielles,

$$\frac{d^2x_h - \sum_{(i,k)} p_{i.k}^{(h)} dx_i dx_k}{dx_h} = \frac{d^2x_{h'} - \sum_{(i,k)} p_{i.k}^{(h')} dx_i dx_k}{dx_{h'}} \tag{4}$$

soient vérifiées, quels que soient les indices h et h'. Cela étant, on en conclut la relation

$$dx_h d^2z - dz\left[d^2x_h - \sum_{(i,k)} p_{i.k}^{(h)} dx_i dx_k\right] = 0, \tag{5}$$

où l'indice h est à volonté. Le lien étroit qui existe entre ces équations et les précédentes (1) s'aperçoit sans peine. Ayant pris pour t l'inconnue z, il suffit que les fonctions $p_{i.k}^{(h)}$ soient déterminées comme il convient pour que les systèmes d'équations (5) et (1) se confondent entièrement. Je dirai alors que le système linéaire (2) leur est *associé*. On voit que les $p_{i.k}^{(h)}$ ne sont pas des fonctions quelconques des variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$, quand même les coefficients $e_{i.k}$ seraient regardés comme arbitraires. Mais, que l'on suppose au contraire, entre $p_{i.k}^{(h)}$ et les $x_{h'}$, des relations à volonté: les équations (5) et, par suite, (4) conservent le même aspect; la seule différence consiste en ce qu'il cesse d'y avoir des coefficients $e_{i.k}$ correspondants. Dans ce qui va suivre, j'aurai souvent à considérer les équations (4) dans toute leur généralité, mais j'imposerai d'ordinaire aux coefficients $p_{i.k}^{(h)}$, que ces équations (4) ne déterminent pas d'une façon complète, une condition importante, c'est qu'il existe une fonction δ, dont les dérivées partielles s'expriment ainsi

$$\frac{\partial \log \delta}{\partial x_k} = -\sum_{(i)} p_{i.k}^{(i)}. \tag{6}$$

Grâce à cette hypothèse, si le système (4) et la fonction ∂ sont donnés, toutes les quantités $p_{i.k}^{(h)}$ sont également connues. Dans ce cas encore, je dirai que les équations (4) et le système linéaire (2) sont *associés*.

On peut encore se représenter d'une autre manière le lien qui rattache les équations (4) ou (5) au système linéaire associé. Considérons, sous la forme

$$\sum_{(h)} q_h z^{(h)} = \text{constante},$$

une intégrale de ce système, pour un choix quelconque des liaisons établies entre les variables x_i; il est clair que les fonctions q_i peuvent être regardées comme des inconnues nouvelles, satisfaisant aux équations linéaires de ce système

$$(2') \qquad dq_i - \sum_{(h.k)} p_{h.k}^{(i)} q_h dx_k = 0,$$

adjoint à (2). Pour définir les x_i, je suppose, outre les équations (2) et (2′) les suivantes

$$(5') \qquad \frac{dx_i}{dz} = q_i;$$

on vérifie sans peine qu'elles entrainent les équations (5) et n'en exigent aucune autre. En raison de sa simplicité, j'omets cette vérification.

La nouvelle manière, ainsi obtenue, de rattacher les équations (4) au système linéaire (2) ou plutôt à son adjoint, est, à quelques égards, plus naturelle que la première, mais elle met moins en évidence l'un des principaux caractères de cette connexion, son invariance pour tous les choix possibles des variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Au reste, alors que le système (2′) est en relations plus directes avec les équations de la dynamique, telles que Lagrange les a construites, le système (2) est au contraire plus étroitement lié aux équations d'Hamilton, c'est la conclusion bien aisée à déduire des remarques précédentes.

Lorsqu'il existe des coefficients $e_{i'.k'}$, leurs relations avec les quantités $p_{i.k}^{(h)}$ peuvent être mises sous cette forme

$$(7) \qquad \frac{\partial e_{i.k}}{\partial x_{i'}} + \sum_{(h)} (e_{i.h} p_{k.i'}^{(h)} + e_{h.k} p_{i.i'}^{(h)}) = 0.$$

En effet, après avoir remplacé z par t dans les équations (5), on voit que pour les faire coincider avec (1), il est nécessaire et suffisant que ces identités

$$(8) \qquad \sum_{(h.h')} dx_h dx_{h'} \left[\frac{\partial e_{i.h'}}{\partial x_h} - \frac{1}{2} \frac{\partial e_{h.h'}}{\partial x_i} + \sum_{(k)} p^{(k)}_{h.h'} e_{i.k} \right] = 0$$

soient vérifiées. Comme les indices h et h' reçoivent toutes les valeurs $\leq m$, chaque produit $dx_h dx_{h'}$ a pour facteur

$$\left(\frac{\partial e_{i.h'}}{\partial x_h} - \frac{1}{2} \frac{\partial e_{h.h'}}{\partial x_i} + \sum_{(k)} p^{(k)}_{h.h'} e_{i.k} \right) + \left(\frac{\partial e_{i.h}}{\partial x_{h'}} - \frac{1}{2} \frac{\partial e_{h'.h}}{\partial x_i} + \sum_{(k)} p^{(k)}_{h'.h} e_{i.k} \right).$$

Mais la seconde parenthèse a été déduite de la première en permutant h et h' et la somme des deux devant être nulle, on en conclut

$$(9) \qquad \frac{\partial e_{i.h'}}{\partial x_h} + \frac{\partial e_{i.h}}{\partial x_{h'}} - \frac{\partial e_{h.h'}}{\partial x_i} + 2 \sum_{(k)} p^{(k)}_{h'.h} e_{i.k} = 0.$$

Dans cette identité, je permute i avec h, puis avec h', ce qui donne les deux suivantes

$$(10) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial e_{h.h'}}{\partial x_i} + \dfrac{\partial e_{i.h}}{\partial x_{h'}} - \dfrac{\partial e_{i.h'}}{\partial x_h} + 2 \sum_{(k)} p^{(k)}_{i.h'} e_{k.h} = 0, \\ \dfrac{\partial e_{i.h'}}{\partial x_h} + \dfrac{\partial e_{h.h'}}{\partial x_i} - \dfrac{\partial e_{h.i}}{\partial x_{h'}} + 2 \sum_{(k)} p^{(k)}_{i.h} e_{k.h'} = 0. \end{cases}$$

L'ensemble (9, 10) équivaut aux relations (7) et le laisse d'abord reconnaître. On voit de plus que les $p^{(h)}_{i.k}$ sont toujours déterminés quand les $e_{i.k}$ le sont eux-mêmes, pourvu que le déterminant symétrique de ces derniers diffère de zéro; or ceci est une condition remplie par les équations de la dynamique.

Soit Δ ce déterminant: il résulte immediatement des équations (7), eu égard aux propriétés bien connues des déterminants

$$(11) \qquad d\Delta + 2\Delta \sum_{(i.h)} p^{(h)}_{i.k} dx_i = 0$$

et, d'après les formules (6),

$$(12) \qquad \Delta = c\delta^2,$$

c désignant une constante arbitraire.

Soient $E_{i.k}$ des fonctions ainsi définies

$$(13)\qquad \sum_{(i)} E_{i.k} e_{i.k} = 1, \qquad \sum_{(i)} E_{i.h} e_{i.k} = 0.$$

Voici, en tenant compte de (7), la conséquence évidente des égalités (13),

$$(14)\qquad dE_{i.k} - \sum_{(h.i')} (E_{i.h} p_{i'.h}^{(k)} + E_{h.k} p_{h.i'}^{(i)}) dx_{i'} = 0,$$

permettant de déterminer les $E_{i.k}$ sans aucun intermédiaire.

Réciproquement, si des inconnues doivent satisfaire aux équations (14), il est toujours permis de les supposer liées aux coefficients $e_{i.k}$ par les relations (13); la façon symétrique dont les systèmes (14) et (7) se correspondent suffit pour le faire voir.

§ 2. *Equations différentielles d'ordre supérieur formant un système incomplet. Invariants des équations de la dynamique ou des équations générales de même aspect.*

Nous avons dit § 1 qu'aux équations de cette espèce

$$(1)\qquad \frac{d^2x_h - \sum_{(i.k)} p_{i.k}^{(h)} dx_i dx_k}{dx_h} = \frac{d^2x_{h'} - \sum_{(i.k)} p_{i.k}^{(h')} dx_i dx_k}{dx_{h'}},$$

qui comprennent comme cas particulier les équations de la dynamique, est associé un système linéaire, toujours le même quel que soit le choix des variables x_i. On peut à ce dernier rattacher toute une série de groupes d'équations entre les x_i; ces équations sont analogues à (1), mais d'ordre supérieur à deux; elles forment des systèmes incomplets, où le nombre des relations distinctes est inférieur à $m - 1$.

Il n'y a, pour les obtenir, qu'à différentier un nombre quelconque de fois la première équation (2 § 1) et à supposer que les variables x_i sont assujetties à des conditions telles que toutes les équations ainsi construites ne soient pas indépendantes.

Par exemple, si l'on pose pour abréger

$$Ddx_h = d^2x_h - \sum_{(i,k)} p_{i,k}^{(h)} dx_i dx_k,$$

$$D^2 dx_h = D.Ddx_h = dDdx_h - \sum_{(i,k)} p_{i,k}^{(h)} (dx_k Ddx_i + dx_i Ddx_k),$$

etc.;

de la première équation (2 § 1) il résulte

$$(2)\qquad \begin{aligned} d^2z - \sum_{(h)} z^{(h)} Ddx_h &= 0, \\ d^3z - \sum_{(h)} z^{(h)} D^2dx_h &= 0; \end{aligned}$$

ces relations et celle d'où l'on est parti,

$$dz - \sum_{(h)} z^{(h)} dx_h = 0,$$

cesseront d'être indépendantes, si l'on imagine que les variables x_i satisfassent à ces identités

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} dx_h & dx_{h'} & dx_{h''} \\ Ddx_h & Ddx_{h'} & Ddx_{h''} \\ D^2dx_h & D^2dx_{h'} & D^2dx_{h''} \end{vmatrix} = 0,$$

dont $m - 2$ sont seules distinctes. Lorsqu'elles ont lieu, l'inconnue principale z satisfait à une équation différentielle du 3ᵉ ordre, qu'on peut représenter ainsi

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} dz\ , & dx_h\ , & dx_{h'} \\ d^2z\ , & Ddx_h\ , & Ddx_h \\ d^3z\ , & D^2dx_h\ , & D^2dx_{h'} \end{vmatrix} = 0$$

Rien n'empêche de parvenir aux équations (3) et (4), en les rattachant au système (2', § 1). Elles expriment en effet que, z étant donnée, il y a entre les $z^{(i)}$ deux relations entièrement connues et non davantage. Or l'équation suivante

$$(5)\qquad \sum_{(h)} q_h z^{(h)} = c$$

peut être substituée à l'une de celles qui constituent le système (2), puisqu'elle en est une intégrale et, les mêmes conditions étant imposées, les équations (4) sont remplacées par celles-ci

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} c & q_h & q_{h'} \\ dz & dx_h & dx_{h'} \\ d^2z & Ddx_h & Ddx_{h'} \end{vmatrix} = 0,$$

dans lesquelles la constante c est arbitraire. J'ajoute que les équations du second ordre étudiées au § 1 font connaître une solution particulière des équations (4) ou (6) de ce paragraphe.

J'indiquerai une seule application des systèmes incomplets tels que (3); elle est relative au dernier d'entre eux. De l'égalité

$$dz - \sum_{(h)} z^{(h)} dx_h = 0$$

peuvent être déduites, on le sait, les suivantes

$$d^2z - \sum_{(h)} z^{(h)} Ddx_h = 0 \ , \quad . \ . \ . \ , \quad d^m z - \sum_{(h)} z^{(h)} D^m dx_h = 0;$$

mais, afin qu'elles cessent d'être distinctes, il est nécessaire et suffisant qu'il y ait entre les x_i une relation unique, d'ordre m,

$$(7) \qquad \begin{Vmatrix} dx_h \\ Ddx_h \\ \vdots \\ D^m dx_h \end{Vmatrix} = 0;$$

celle-ci constitue seule l'un des groupes d'équations liés d'une manière invariante aux systèmes linéaires (2) et (2') § 1 et, par suite, aux équations (4) et (5) du même paragraphe. Si donc on considère, dans cette relation, l'ensemble des termes ne dépendant que des différentielles du premier ordre, cet ensemble est un covariant des équations (4) § 1. Il fait connaître un moyen effectif de construire les invariants de ces équations si générales, dans lesquelles toutes celles de la dynamique se trouvent comprises.

Je me borne à ces observations sur un sujet dont l'étude détaillée n'est pas indispensable pour la suite du présent Mémoire.

§ 3. *Conditions spéciales aux équations de la dynamique. Propriétés correspondantes des systèmes linéaires associés. Généralisation du problème de M. Dini.*

Je conserve les notations du § 1 et, admettant que les équations différentielles

$$(1)\qquad \frac{d^2x_h - \sum_{(i,k)} p_{i.k}^{(h)} dx_i dx_k}{dx_h} = \frac{d^2x_{h'} - \sum_{(i,k)} p_{i.k}^{(h')} dx_i dx_k}{dx_{h'}}$$

sont celles d'un problème de dynamique proprement dit, je considère les identités (7) § 1,

$$(2)\qquad \frac{\partial e_{i.k}}{\partial x_{i'}} + \sum_{(h)} (p_{k.i'}^{(h)} e_{i.h} + p_{i.i'}^{(h)} e_{k.h}) = 0,$$

qui traduisent cette hypothèse. Elles ont, pour le système linéaire

$$(3)\qquad dz - \sum_{(h)} z^{(h)} dx_h = 0, \qquad dz^{(i)} + \sum_{(h.k)} p_{i.k}^{(h)} z^{(h)} dx_k = 0$$

associé à (1), une signification très visible: elles expriment qu'il possède, *quelles que soient les relations établies entre les* x_i, m solutions telles que les expressions correspondantes de dz vérifient la condition suivante

$$(4)\qquad \sum_{(h)} dz_h^2 = \sum_{(i.k)} e_{i.k} dx_i dx_k.$$

Je déduis en effet des relations (3) celles qui sont satisfaites par les produits $z^{(i)}z^{(k)}$ et je trouve

$$(5)\qquad d(z^{(i)}z^{(k)}) + \sum_{(h.i')} (p_{k.i'}^{(h)} z^{(i)} z^{(h)} + p_{i.i'}^{(h)} z^{(k)} z^{(h)}) dx_{i'} = 0;$$

les équations (2) en définissent précisément une solution, indépendante des liaisons établies entre les x_i,

$$(6)\qquad e_{h.k} = c\,.\,z^{(h)} z^{(k)},$$

et de laquelle on conclut la formule (4).

Le plus souvent d'ailleurs cette solution est unique, abstraction faite de l'indéterminée c qui la multiplie. Mais les conditions (2) sont susceptibles d'autres interprétations. Elles expriment que le système (3) possède une *intégrale* du second degré,

$$\sum_{(h.h')} E_{h.h'} z^{(h)} z^{(h')} = \text{constante}, \tag{7}$$

ou bien qu'il y a, pour le système adjoint à (3), une intégrale quadratique

$$\sum_{(h.h')} e_{h.h'} q_h q_{h'} = \text{constante}, \tag{7'}$$

quelles que soient les relations établies entre les x_i. La constatation est des plus simples et ne mérite pas qu'on s'y arrête, mais le fait est digne d'intérêt, à cause de ses conséquences.

Les conditions (2) étant supposées remplies, les relations (14) § 1,

$$\frac{\partial E_{i.k}}{\partial x_{i'}} - \sum_{(h)} (p_{h.i'}^{(k)} E_{i.h} + p_{h.i'}^{(i)} E_{h.k}) = 0, \tag{8}$$

sont aussi satisfaites; les notations suivantes

$$E_{i.k} = f_{i.k} \cdot \delta^{\frac{2}{m+1}},$$

$$p_{i.k}^{(h)} = b_{i.k}^{(h)}, \ (i-h)(k-h) \gtrless 0; \qquad p_{i.k}^{(i)} = b_{i.k}^{(i)} - \frac{1}{m+1} \frac{\partial \log \delta}{\partial x_k}, \tag{9}$$

$$p_{h.h}^{(h)} = b_{h.h}^{(h)} - \frac{2}{m+1} \frac{\partial \log \delta}{\partial x_h},$$

permettent de les représenter sous une forme plus commode et changent les équations (1) en d'autres semblables,

$$\frac{d^2 x_h - \sum_{(i.k)} b_{i.k}^{(h)} dx_i dx_k}{dx_h} = \frac{d^2 x_{h'} - \sum_{(i.k)} b_{i.k}^{(h')} dx_i dx_k}{dx_{h'}}, \tag{10}$$

où figurent seuls les coefficients $b_{i.k}^{(h)}$. D'après les égalités (6) § 1, ces derniers sont liés par les relations

$$\sum_{(i)} b_{i.k}^{(i)} = 0; \tag{11}$$

ils sont entièrement connus, si les équations (10) sont elles-mêmes données et l'on voit qu'ils ne dépendent pas du déterminant δ. Il est aisé d'achever l'élimination de celui-ci entre les équations (8) et voici les relations ainsi formées,

$$\frac{\partial f_{i.i}}{\partial x_{i'}} = 2\sum_{(h)} b_{h.i'}^{(i)} f_{i.h}\ ,\ (i - i' \gtrless 0),$$

(12) $$\frac{\partial f_{i.k}}{\partial x_{i'}} = \sum_{(h)} (b_{h.i'}^{(k)} f_{i.h} + b_{h.i'}^{(i)} f_{h.k})\ ,\ [(i - k)(i' - k)(i - i') \gtrless 0],$$

$$\frac{\partial f_{i.i}}{\partial x_i} - 2\frac{\partial f_{i.k}}{\partial x_k} = 2\sum_{(h)} [b_{i.h}^{(i)} f_{i.h} - b_{k.h}^{(k)} f_{i.h} - b_{h.k}^{(i)} f_{h.k}];$$

leur nombre est $\frac{m(m-1)(m+2)}{2}$; jointes aux expressions des m dérivées partielles, $\frac{\partial \log \delta}{\partial x_k}$, elles seraient équivalentes aux équations (8). De plus, à l'égard des quantités $f_{i.i}$, $f_{i.k}$, le système (12) est purement linéaire.

Ainsi et, comme conclusions des remarques précédentes, pour que les équations (10) appartiennent à un problème de dynamique, il faut et il suffit que les équations (12) admettent une solution. Lorsqu'il en est ainsi, la forme quadratique correspondante

(13) $$2Tdt^2 = \sum_{(i.k)} e_{i.k} dx_i dx_k$$

se calcule sans difficulté, car les déterminants symétriques

$$\|E_{i.k}\|,\ \|e_{i.k}\|$$

vérifient évidemment l'identité

$$\|E_{i.k}\| . \|e_{i.k}\| = 1;$$

par suite, d'après l'égalité (12) § 1,

(14) $$\|E_{i.k}\| = \frac{1}{c\delta^2}$$

et, faisant égale à 1 la constante c, qu'il est inutile de laisser arbitraire

(15) $$\|f_{i.k}\| = \delta^{\frac{-2}{m+1}}.$$

D'ailleurs

$$(16) \qquad e_{i.k} = \frac{1}{\| E_{i'.k'} \|} \cdot \frac{\partial \| E_{i'.k'} \|}{\partial E_{i.k}},$$

c'est à dire

$$(17) \qquad e_{i.k} = \frac{\delta^{\frac{2}{m+1}}}{\| f_{i'.k'} \|} \frac{\partial \| f_{i'.k'} \|}{\partial f_{i.k}} = \frac{\partial \| f_{i'.k'} \|}{\| f_{i'.k'} \|^2 \partial f_{i.k}},$$

de sorte que la forme (13) s'exprime de cette manière

$$(13') \qquad 2\,T dt^2 = \frac{1}{\| f_{i'.k'} \|^2} \sum_{(i.k)} \frac{\partial \| f_{i'.k'} \|}{\partial f_{i.k}} dx_i dx_k.$$

On a vu que, les équations (10) étant données, le système linéaire associé ne l'est pas complètement: sa détermination n'est achevée que si l'on connait une certaine fonction caractéristique δ, dont le choix d'ailleurs est à volonté.

Ceci rappelé, j'imagine que les identités (12) possèdent, non plus une, mais deux solutions distinctes et j'accentue, pour les distinguer, les quantités qui se rattachent à la seconde. Il existe alors deux systèmes linéaires, associés aux équations (10) et admettant une intégrale quadratique, quelles que soient les liaisons établies entre les x_i. L'un d'eux répond à une fonction δ définie par la formule,

$$\delta = \| f_{i.k} \|^{-\frac{m+1}{2}},$$

l'autre à

$$\delta' = \| f'_{i.k} \|^{-\frac{m+1}{2}}.$$

Mais les équations (10) sont indépendantes de δ et rien n'empêche de leur associer un système linéaire pour lequel la fonction caractéristique soit une constante. Soit ζ l'inconnue principale de ce système, en sorte que, (§ 1)

$$(18) \qquad \frac{d^2 x_h - \sum_{(i.k)} b_{i.k}^{(h)} dx_i dx_k}{dx_h} = \frac{d^2 \zeta}{d\zeta}.$$

Les relations (9) montrent qu'il en faut conclure

$$(19) \qquad \frac{d^2\zeta}{d\zeta} = \frac{d^2 z}{dz} - \frac{2}{m+1} d \log \delta,$$

c'est dire qu'il est permis de prendre

$$(19') \qquad d\zeta = \delta^{\frac{2}{m+1}} . dz = \| f_{i.k} \| dz.$$

Or les équations (10), qui sont celles des trajectoires du mouvement étudié, s'obtiennent en joignant au système linéaire

$$(20) \qquad d\gamma_i - \sum_{(h.k)} b_{h.k}^{(i)} \gamma_h dx_k = 0,$$

les équations suivantes

$$(21) \qquad \frac{dx_i}{d\zeta} = \gamma_i$$

et, puisque le système primitif

$$(22) \qquad dq_i - \sum_{(h.k)} p_{h.k}^{(i)} q_h dx_k = 0,$$

répondant à l'inconnue principale z, à la fonction caractéristique δ, admet une intégrale quadratique

$$(23) \qquad \frac{1}{\| f_{i'.k'} \|^2} \sum_{(i.k)} \frac{\partial \| f_{i'.k'} \|}{\partial f_{i.k}} q_i q_k = \text{constante},$$

le système (20) lui-même en possède une

$$(24) \qquad \sum_{(i.k)} \frac{\partial \| f_{i'.k'} \|}{\partial f_{i.k}} \gamma_i \gamma_k = \text{constante}.$$

Les mêmes choses étant vraies quand l'inconnue principale est z' et la fonction caractéristique δ', il en doit admettre une seconde,

$$(25) \qquad \sum_{(i.k)} \frac{\partial \| f'_{i'.k'} \|}{\partial f'_{i.k}} \gamma_i \gamma_k = \text{constante};$$

leur quotient,

$$(26) \qquad \sum_{(i.k)} \frac{\partial \| f'_{i'.k'} \|}{\partial f'_{i.k}} dx_i dx_k : \sum_{(i.k)} \frac{\partial \| f_{i'.k'} \|}{\partial f_{i.k}} dx_i dx_k = \text{constante},$$

où n'entre plus ζ, est donc une intégrale des équations (10). Il est aisé de la transformer, en y faisant apparaître dz ou, ce qui est la même chose, dt, car l'équation (23) peut se représenter ainsi

$$\sum_{(i.k)} \frac{\partial \| f_{i'.k'} \|}{\partial f_{i.k}} dx_i dx_k = c \| f_{i'.k'} \|^2 dt^2,$$

ce qui change (26) en une intégrale quadratique,

$$\frac{1}{\| f_{i'.k'} \|^2} \sum_{(i.k)} \frac{\partial \| f'_{i'.k'} \|}{\partial f'_{i.k}} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt} = \text{constante}. \tag{27}$$

Mais il y a d'autres conclusions à déduire des relations (12). Comme elles sont linéaires, à l'égard des inconnues qu'elles renferment, s'il en existe deux solutions distinctes, les fonctions

$$F_{i.k} = f'_{i.k} + c f_{i.k}, \tag{28}$$

qui contiennent une constante arbitraire c, en font connaitre une solution plus générale, à laquelle s'appliquent aussi les considérations précédentes. Il y a donc en ce cas une intégrale quadratique,

$$\frac{1}{\| f_{i'.k'} \|^2} \sum_{(i.k)} \frac{\partial \| F_{i'.k'} \|}{\partial F_{i.k}} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt} = \text{constante}, \tag{29}$$

dont le premier membre est une fonction entière de c; toutes réductions faites, cette arbitraire y figure en général à la puissance $m - 1$.

Ainsi et pour conclure sur ce sujet: *quand le système linéaire* (20), *associé aux équations de la dynamique, admet deux intégrales du second degré, ces équations elles-mêmes admettent en général, outre l'intégrale des forces vives,* $m - 1$ *intégrales quadratiques, coefficients des différentes puissances de* c *dans le premier membre de l'équation* (29). Au reste, si l'on considère les mouvements qui répondent aux deux expressions

$$(30) \quad \begin{aligned} 2T dt^2 &= \sum_{(i.k)} e_{i.k} dx_i dx_k, \\ 2T' dt^2 &= \sum_{(i.k)} e'_{i.k} dx_i dx_k, \end{aligned}$$

prises pour intégrales des forces vives, les équations (10) leur sont communes, et définissent leurs trajectoires. La question qui vient d'être étudiée

n'est donc qu'une généralisation du problème résolu par M. Dini quand les variables sont au nombre de deux. La transformation par laquelle on peut passer de l'un de ces mouvements à l'un de ses *conjugués* est immédiatement en évidence. Si l'on désigne, pour le premier, par t, pour le second, par t', la variable qui représente le temps, l'analyse précédente montre que l'on a

$$dt = \delta^{\frac{2}{m+1}} d\zeta, \qquad dt' = \delta'^{\frac{2}{m+1}} d\zeta, \qquad dt' = dt \left(\frac{\delta'}{\delta}\right)^{\frac{2}{m+1}},$$

c'est à dire, à cause de l'égalité (15),

$$(31) \qquad dt' \|f'_{i.k}\| = dt \|f_{i.k}\|.$$

Quand

$$\|f'_{i.k}\| = \|f_{i.k}\|,$$

d'où suit

$$\|e'_{i.k}\| = \|e_{i.k}\|,$$

la relation (31) se réduisant à $dt = dt'$, les deux mouvements considérés sont confondus; en d'autres termes, il y a deux intégrales quadratiques, *qui peuvent jouer le même rôle que celles des forces vives.* Afin qu'un pareil cas se présente, il est évidemment nécessaire et suffisant que les équations (7) § 1,

$$\frac{\partial e_{i.k}}{\partial x_{i'}} + \sum_{(h)} (p^{(h)}_{k.i'} e_{i.h} + p^{(h)}_{i.i'} e_{h.k}) = 0,$$

où l'on regarde comme inconnues les $e_{i.k}$ et comme données les coefficients $p^{(h)}_{i.k}$, admettent deux solutions différentes.

L'existence de semblables cas pourrait sembler incertaine a priori, mais ils ont été obtenus d'une façon explicite, lorsque les variables x_i sont au nombre de 3 (Note de l'auteur, Comptes rendus, avril 1891). Quand il y a seulement deux variables, de tels mouvements ne peuvent se produire que sur les lignes géodésiques des surfaces à courbure constante. L'intégrale (26) a d'abord été signalée, pour ces cas, dans la communication qui vient d'être citée. Le théorème général a été donné, avec d'autres propositions, par M. Painlevé dans une note, insérée aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris le 11 avril 1892. Le théorème, établissant l'existence de plusieurs intégrales quadratiques

et les conditions pour qu'un système d'équations (10) appartienne à un problème de dynamique, a été énoncé sans démonstration par l'auteur de ce Mémoire, dans une note insérée aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences le 25 avril 1892.

CHAPITRE II.

§ 4. *Intégrales d'ordre supérieur à deux. Propriétés de certaines intégrales, qui forment une classe séparée.*

Un point parait très digne d'intérêt dans la théorie qui vient d'être exposée: les intégrales quadratiques trouvées forment une classe, dont la considération des systèmes linéaires associés aux équations de la dynamique met en évidence les caractères tout spéciaux. Voici en effet ce qui arrive d'ordinaire, quand les équations de la dynamique admettent une intégrale du second degré,

$$\sum_{(i,k)} e_{i,k} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt} = \text{constante},$$

différente de celle des forces vives.

Le système linéaire associé est adjoint au suivant

$$dq_i - \sum_{(h,k)} p_{h,k}^{(i)} q_h dx_k = 0 \tag{1}$$

et celui-ci possède, à cause des relations (5′) § 1, une intégrale du second degré,

$$\sum_{(i,k)} e_{i,k} q_i q_k = \text{constante}, \tag{2}$$

mais seulement, lorsqu'on suppose entre les x_i les liaisons définies par les équations du mouvement,

$$\frac{d^2 x_h - \sum_{(i,k)} p_{i,k}^{(h)} dx_i dx_k}{dx_h} = \frac{d^2 x_{h'} - \sum_{(i,k)} p_{i,k}^{(h')} dx_i dx_k}{dx_{h'}}. \tag{2}$$

Tout autre est le cas étudié; l'intégrale (2) appartient alors au système (1), *quelles que soient les liaisons établies entre les* x_i, si pourtant la fonction caractéristique est choisie comme il convient. Il serait naturel de faire, pour les intégrales d'ordre supérieur à deux, une distinction de cette espèce, en sorte qu'on est conduit à demander quels sont les problèmes de dynamique ou les problèmes plus généraux répondant à des équations différentielles de même aspect, pour lesquels l'un des systèmes linéaires (1) possède une intégrale d'ordre quelconque n, indépendante des liaisons établies entre les x_i. La réponse à cette question est donnée par l'application d'un important théorème de M. Darboux.

Soit R cette intégrale d'ordre n, que je suppose entière et homogène à l'égard des quantités q_i. Quand les variables x_i sont exprimées en fonction de l'une d'entre elles, d'une manière quelconque mais définitive, le système linéaire (1) ne peut admettre une intégrale, telle que $R =$ constante, sans en admettre d'autres, qu'on peut construire. Pour le faire voir, représentons par $q_i^{(1)}, q_i^{(2)}, \ldots, q_i^{(m)}$, m solutions distinctes des équations (1). Il est aisé de calculer le déterminant $\|q_i^{(h)}\|$, car, en tenant compte de (1), sa différentielle est donnée par la formule

$$d\,\|q_i^{(h)}\| = \sum_{(i',k)} p_{i'.k}^{(i')}\,\|q_i^{(h)}\|\,dx_k;$$

en conséquence,

$$\|q_i^{(h)}\| = \frac{c}{\delta},$$

c désignant une constante arbitraire; d'ailleurs δ est une fonction des variables x_i, traitées comme indépendantes. D'après la méthode de M. Darboux, tout covariant de R, où les q_i sont prises pour les variables, multiplié par une puissance convenable de δ, donne encore une intégrale des équations (1) et cette intégrale *est manifestement vraie, d'après la remarque faite sur* δ, *quelles que soient les liaisons établies entre les* x_i, *puisqu'il en est ainsi de l'intégrale* R.

De même, tout invariant de cette dernière, multiplié par une certaine puissance de δ, doit être une constante. Comme ce produit ne peut être une intégrale, ne contenant pas les q_i, on doit, en égalant à une constante, trouver une identité satisfaite par les coefficients de l'intégrale R. La proposition précédente montre qu'il faut, pour l'examen de la question posée, distinguer plusieurs hypothèses.

1°. L'intégrale R est d'ordre impair: on sait qu'une semblable forme admet en général des covariants du premier degré; le système (1) possède alors, pour un choix convenable de la fonction caractéristique, une intégrale linéaire à l'égard des q_i. Le problème correspondant est donc l'un de ceux auxquels s'appliquent en particulier les méthodes du Chapitre I.[1]

2°. L'intégrale R est d'ordre pair: Elle admet en général deux covariants quadratiques; le système (1) possède ainsi, pour un choix convenable de la fonction caractéristique, deux intégrales du second degré et, comme conséquence, le problème associé, *qui est toujours un problème de dynamique proprement dit*, se confond avec l'un de ceux qui ont été examinés.

3°. L'intégrale R est exceptionnelle: ses covariants, soit linéaires, soit quadratiques, s'évanouissent ou bien ne constituent pas des intégrales différentes de R. Ces cas, s'ils existent, sont les seuls qui puissent donner lieu à des recherches nouvelles, analogues à celles dont le Chapitre I fournit les éléments et cependant relatives à des problèmes essentiellement distincts.

§ 5. *Quelques solutions du problème de la conservation des trajectoires.*

Les problèmes de dynamique, susceptibles d'être transformés sans altération des trajectoires, s'obtiennent, d'après ce qui précède, en exprimant que les relations (12) § 3 admettent deux solutions. Voici les cas les plus simples pour lesquels cette circonstance se présente.

Considérons une forme quadratique,

$$(1) \qquad 2Tdt^2 = \alpha_1^2 dx_1^2 + \alpha_2^2 dx_2^2 + \ldots + \alpha_m^2 dx_m^2,$$

où n'entrent que les carrés des différentielles et proposons-nous de choisir pour $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, des expressions telles,

1° que les identités (12) § 3, construites à l'aide de la forme (1), soient aussi satisfaites par une seconde forme quadratique,

2° que cette dernière ne renferme, comme la précédente, que les carrés des différentielles.

---

[1] Il est d'ailleurs possible d'obtenir tous les cas de cette espèce, donnés par une formule explicite.

Or reconnait d'abord que, dans le problème de dynamique attaché à la forme (1), les coefficients $b_{i.k}^{(h)}$ sont déterminés par les formules

$$
(2)\quad \begin{gathered}
b_{i.k}^{(i)} = -\frac{\partial \log (a_i \varphi)}{\partial x_k}, \qquad b_{i.i}^{(i)} = -\frac{\partial \log (a_i \varphi^2)}{\partial x_i}, \qquad b_{h.h}^{(i)} = \frac{a_h^2}{a_i^2}\frac{\partial \log a_h}{\partial x_i}, \\
b_{i.k}^{(h)} = 0, \quad (i-k)(k-h)(i-h) \gtrless 0, \quad \varphi = \delta^{\frac{-1}{m+1}} = (\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m)^{\frac{-1}{m+1}},
\end{gathered}
$$

en sorte que, pour la seconde forme quadratique, dont l'existence est supposée, les fonctions $f_{i.k}$, $f_{i.i}$, doivent vérifier les relations suivantes

$$
\frac{\partial (f_{i.i} a_i^2 \varphi^2)}{\partial x_h} = 2\alpha_h^2 \varphi^2 . f_{i.h} \frac{\partial \log a_h}{\partial x_i}, \qquad \frac{\partial (f_{i.k} a_i a_k \varphi^2)}{\partial x_h} = \frac{a_i a_h \varphi^2}{a_k} f_{i.h} \frac{\partial a_h}{\partial x_k} + \frac{a_h a_k \varphi^2}{a_i}\frac{\partial a_h}{\partial x_i} f_{h.k},
$$

$$
(3)\quad \begin{gathered}
\frac{\partial (a_i^2 \varphi^2 f_{i.i})}{\partial x_i} - 2\alpha_i^2 \varphi^2 f_{i.i} \frac{\partial \log a_h}{\partial x_i} - 2\frac{a_i}{a_h}\frac{\partial (a_i a_h \varphi^2 f_{i.h})}{\partial x_h} + 2\alpha_h^2 f_{h.h}\varphi^2 \frac{\partial \log a_h}{\partial x_i} \\
+ \frac{2a_i}{a_h}\alpha_i \alpha_h f_{i.h} \frac{\partial \log a_i}{\partial x_h} - 2\sum_{(h')} \frac{a_i}{a_{h'}} \varphi^2 f_{i.h'} \frac{\partial}{\partial x_h} \log\left(\frac{a_h}{a_i}\right) = 0, \\
(i-k)(i-h) \gtrless 0, \qquad (i-h')(k-h') \gtrless 0;
\end{gathered}
$$

de plus, $f_{i.k} = 0$, dès que i n'est pas égal à k. Le produit,

$$
f_{i.i} \alpha_i^2 \varphi^2 = \psi_i,
$$

est donc une fonction de la seule variable x_i, en vertu de la première équation (3); la deuxième équation du même groupe est déjà satisfaite et la troisième peut se représenter ainsi

$$
(4)\qquad \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} = 2(\psi_i - \psi_h)\frac{\partial \log a_h}{\partial x_i},
$$

ce qui exige

$$
(5)\qquad \alpha_h^2 = \prod_{(h' \gtrless h)} (\psi_h - \psi_{h'}) F_h(x_h),
$$

ou bien, après une transformation évidente,

$$
(5')\qquad \alpha_h^2 = \prod_{(h' \gtrless h)} (\psi_h - \psi_{h'}).
$$

Les fonctions ψ_h sont arbitraires, chacune d'elles dépend de la seule va-

riable x_h et le produit s'étend à toutes les combinaisons dans lesquelles h' est différent de h. Comme d'ailleurs

$$f_{i.i} = \frac{\psi_i}{\alpha_i^2 \varphi^2},$$

les coefficients de la forme quadratique $\sum\limits_{(i)} e_{i.i} dx_i^2$, conjuguée de (1), sont donnés par les formules

$$e_{i.i} = \frac{1}{f_{i.i}} \frac{(a_1 a_2 \ldots a_m)^{\frac{2}{m+1}}}{\psi_1 \psi_2 \ldots \psi_m} = \frac{1}{\psi_1 \psi_2 \ldots \psi_m} \frac{a_i^2}{\psi_i}.$$

Le problème de dynamique attaché à la forme quadratique (1) admet $m - 1$ intégrales du second degré, conformément au théorème général; ces intégrales sont distinctes et comprises dans l'équation suivante

$$(7) \qquad \sum_{(i)} \frac{(\psi_1 + c) \ldots (\psi_m + c)}{\psi_i + c} \alpha_i^2 \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 = \text{constante},$$

où la constante c est arbitraire. Entre ces résultats et ceux qui se rapportent à un cas bien connu, pour lequel les équations de la dynamique admettent aussi m intégrales du second degré, l'analogie n'est qu'apparente; les relations (5') font connaître en réalité un cas entièrement nouveau et répondant à des expressions tout aussi simples.

§ 6. *Transformation servant à déduire, d'une solution connue du problème, une autre solution, pour laquelle le nombre des variables est plus grand.*

Je considère le système linéaire associé aux équations de la dynamique et je conserve les notations déjà employées; je suppose que les x_i subissent une variation ∂x_i; z et $z^{(h)}$ éprouvent une variation correspondante ∂z, $\partial z^{(h)}$ et je pose

$$(1) \qquad \partial z = \zeta, \qquad \partial x_i = x_{m+i}, \qquad \partial z^{(h)} = \zeta^{(h)}, \qquad z^{(h)} = \zeta^{(m+h)};$$

du système linéaire

$$(2) \qquad dz - \sum_{(h)} z^{(h)} dx_h = 0, \qquad dz^{(i)} + \sum_{(h,k)} p_{i.k}^{(h)} z^{(h)} dx_k = 0,$$

il résulte immédiatement celui-ci

$$
(3)\quad
\begin{gathered}
d\zeta - \sum_{(h)} (\zeta^{(h)} dx_h + \zeta^{(m+h)} dx_{m+h}) = 0, \\
d\zeta^{(i)} + \sum_{(h,k)} \left[p_{i.k}^{(h)} \zeta^{(h)} dx_k + p_{i.k}^{(h)} \zeta^{(m+h)} dx_{m+k} + \sum_{(h')} \zeta^{(m+h)} \left(x_{m+h'} \frac{\partial p_{i.k}^{(h)}}{\partial x_{h'}} \right) dx_k \right] = 0.
\end{gathered}
$$

Or il est de même espèce que la premier, mais le nombre des variables y est double; les équations différentielles qui lui sont associées sont

1° celles qui l'étaient aux équations (2),

2° les suivantes

$$
\begin{gathered}
dx_{m+h} d^2\zeta - d\zeta d^2 x_{m+h} \\
+ \sum_{(i,k)} d\zeta \left[p_{i.k}^{(h)} (dx_i dx_{m+k} + dx_k dx_{m+i}) + \sum_{(h')} x_{m+h'} \frac{\partial p_{i.k}^{(h)}}{\partial x_{h'}} dx_i dx_k \right] = 0,
\end{gathered}
$$

qui peuvent être regardées comme représentant les variations des premières. De même, en posant $\delta q_i = q_{m+i}$, on déduit, du système adjoint à (2),

$$
(2') \qquad dq_i - \sum_{(h,k)} p_{h.k}^{(i)} q_h dx_k = 0,
$$

celui-ci

$$
(3') \qquad dq_{m+i} = \sum_{(h.k)} \left[p_{h.k}^{(i)} (q_h dx_{m+k} + q_{m+h} dx_k) + \sum_{(h')} \frac{\partial p_{h.k}^{(i)}}{\partial x_{h'}} x_{m+h'} q_h dx_k \right],
$$

qui est encore de même espèce. Je dis que chaque couple de formes quadratiques conjuguées, c'est à dire correspondant aux mêmes trajectoires, donne le moyen d'en construire une autre, où le nombre des variables est double. Pour le montrer, prenons un paramètre quelconque α, de sorte que $\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} d\alpha$. Supposons, de plus, que le problème de dynamique associé aux équations (2) corresponde à deux formes quadratiques conjuguées: le système (2′) admet une intégrale du second degré,

$$
(4) \qquad \sum_{(i.k)} e_{i.k} q_i q_k = \text{constante},
$$

donnée par la première des formes considérées et de laquelle on conclut

$$
(5) \qquad \sum_{(i.k)} e_{i.k} (q_i \delta q_k + q_k \delta q_i) + \sum_{(i.k.h)} \frac{\partial e_{i.k}}{\partial x_h} q_i q_k \delta x_h = \text{constante},
$$

c'est à dire

$$(6)\qquad \sum_{(i,k)} \left[e_{i.k}(q_i q_{m+k} + q_k q_{m+i}) + \sum_{(h)} \left(x_{m+h} \frac{\partial e_{i.k}}{\partial x_h} \right) q_i q_k \right] = \text{constante.}$$

Voilà donc, pour le système (3′), une intégrale quadratique. Mais ce qui vient d'être dit de la première forme attachée au problème de dynamique considéré, peut être dit de sa conjuguée,

$$(7)\qquad \sum_{(i,k)} e'_{i.k} q_i q_k = \text{constante.}$$

A cette dernière correspond donc une forme, semblable à (6),

$$(8)\qquad \sum_{(i.k)} \left[e'_{i.k}(q_i q_{m+k} + q_k q_{m+i}) + q_i q_k \sum_{(h)} x_{m+h} \frac{\partial e'_{i.k}}{\partial x_h} \right] = \text{constante,}$$

et constituant avec cette dernière une couple de formes conjuguées; c'est ce qu'il s'agissait d'établir. On remarquera que la construction des formes (6) et (8) n'exige aucun calcul et qu'une moitié des variables entre au premier degré dans leurs coefficients.

§ 7. *Intégrales rationnelles. Propriété des équations différentielles de même aspect que celles de la dynamique.*

Bien que la remarque, très simple, contenue dans ce paragraphe, ne se rattache pas d'une façon immédiate aux questions traitées dans ce chapitre et demeure en quelque sorte isolée, il m'a semblé utile de la présenter, avant de mettre fin à cette étude sommaire des problèmes pour lesquels il y a une intégrale des forces vives. Je suppose donc qu'il s'agisse d'étudier un mouvement pour lequel l'intégrale des forces vives existe et la valeur de l'énergie est une constante donnée. Les notations ordinaires étant admises, soient R et S des fonctions homogènes et entières des dérivées $\frac{dx_i}{dt}$, $\frac{R}{S}$ une intégrale rationnelle, d'où suit que $R = 0$, $S = 0$ sont des équations invariantes. Construisons le système linéaire associé aux équations du mouvement et le système adjoint

$$(1)\qquad dq_i - \sum_{(h,k)} p^{(i)}_{h.k} q_h dx_k = 0.$$

On sait, (§ 1), que l'on peut remplacer $\frac{dx_i}{dt}$ par q_i dans chacune des fonctions R et S et, puisqu'elles donnent des équations invariantes, il faut avoir

$$\frac{dR}{dt} = \sum_{(i)} \frac{\partial R}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \sum_{(i)} q_i \frac{\partial R}{\partial x_i} = \lambda R, \tag{2}$$

λ étant une fonction linéaire des q_i. Or, d'après (1),

$$\frac{dq_i}{dt} = \sum_{(h,h')} p_{h.h'}^{(i)} q_h q_{h'} \tag{3}$$

et, si

$$\lambda = \sum_{(h)} \lambda_h q_h, \tag{4}$$

il en résulte

$$\sum_{(i)} \left[q_i \frac{\partial R}{\partial x_i} + \sum_{(h.h')} \frac{\partial R}{\partial q_i} p_{h.h'}^{(i)} q_h q_{h'} \right] = R \sum_{(h)} \lambda_h q_h. \tag{5}$$

Je représente par n le degré de R à l'égard des q_i, de sorte que

$$R = \frac{1}{n} \sum_{(i)} q_i \frac{\partial R}{\partial q_i}.$$

Grâce à cette identité, voici, sous une autre forme, l'équation (5),

$$\sum_{(i)} \left[q_i \frac{\partial R}{\partial x_i} + \sum_{(h.h')} p_{h.h'}^{(i)} \frac{\partial R}{\partial q_i} q_h q_{h'} - \sum_{(h)} q_i q_h \frac{\lambda_h}{n} \frac{\partial R}{\partial q_i} \right] = 0. \tag{6}$$

Mais, après avoir posé

$$p_{i.h}^{(i)} - \frac{\lambda_h}{2n} = b_{i.h}^{(i)}, \qquad p_{h.h}^{(h)} - \frac{\lambda_h}{n} = b_{h.h}^{(h)}, \qquad p_{h.h'}^{(i)} = b_{h.h'}^{(i)}; \quad (h-i)(h'-i) \gtrless 0, \tag{7}$$

l'égalité (6) devient

$$\sum_{(i)} \left[q_i \frac{\partial R}{\partial x_i} + \sum_{(h.h')} b_{h.h'}^{(i)} \frac{\partial R}{\partial q_i} q_h q_{h'} \right] = 0; \tag{8}$$

comme conséquence, les équations différentielles associées au système linéaire

$$dz - \sum_{(h)} z^{(h)} dx_h = 0, \qquad dz^{(i)} + \sum_{(h.k)} b_{i.k}^{(h)} z^{(h)} dx_k = 0, \tag{9}$$

admettent R pour intégrale entière et homogène; mais celui-ci n'a plus d'une façon nécessaire une intégrale du second degré, rien ne prouve même que, sans exception,

$$d \log \delta = -\sum_{(i.k)} b_{i\,k}^{(i)} dx_k$$

soit une différentielle exacte.

La conclusion est qu'à chaque problème de dynamique possédant une intégrale rationnelle, on peut faire correspondre un ensemble d'équations différentielles, de même aspect que les équations de la dynamique et possédant une intégrale entière.

CHAPITRE III.

§ 8. *Equations générales de la mécanique, quand l'intégrale des forces vives n'existe pas, ou, celle-ci ayant lieu, quand la constante de l'energie doit rester arbitraire. Systèmes linéaires associés. Equations différentielles de même aspect que celles de la mecanique. Transformations avec conservation des trajectoires.*

Soit un système matériel, soumis à des forces quelconques X_i, que je suppose fonctions des seules quantités $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Représentons encore par

$$T = \frac{1}{2} \sum_{(i.k)} e_{i.k} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt},$$

la demi-somme des forces vives: voici les équations du mouvement,

$$(1) \qquad \sum_{(k)} e_{i.k} \frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{(h.h')} \left(\frac{\partial e_{i.h'}}{\partial x_h} - \frac{1}{2} \frac{\partial e_{h.h'}}{\partial x_i} \right) \frac{dx_h}{dt} \frac{dx_{h'}}{dt} - X_i = 0,$$

auxquelles il est clair qu'on peut donner la forme

$$(2) \qquad dx_h d^2 t - dt\, d^2 x_h + dt \,.\, \sum_{(i.k)} p_{i.k}^{(h)} dx_i dx_k + p_h dt^3 = 0,$$

en déterminant les $p_{i.k}^{(h)}$ par les relations déjà employées

$$(3) \qquad 2\sum_{(k)} p_{h.h'}^{(k)} e_{i.k} + \frac{\partial e_{i.h'}}{\partial x_h} + \frac{\partial e_{i.h}}{\partial x_{h'}} - \frac{\partial e_{h.h'}}{\partial x_i} = 0$$

et, de plus, les p_k par les suivantes

$$(4) \qquad \sum_{(k)} e_{i.k} p_k = X_i.$$

Considérons un système d'équations différentielles linéaires,

$$(5) \qquad \begin{aligned} dz - \sum_{(h)} z^{(h)} dx_h &= 0, \\ dz^{(i)} + \sum_{(h.k)} p_{i.k}^{(h)} z^{(h)} dx_k &= 0, \end{aligned} \qquad (i, k, h \leqq m + 1)$$

dans lequel les variables sont $x_1, x_2, \ldots, x_m$ et $x_{m+1} = t$, dans lequel en outre on suppose

$$(6) \qquad \begin{aligned} p_{i.m+1}^{(h')} = p_{i.i'}^{(m+1)} = 0, \quad (0 < i \leqq m, \ 0 < i' \leqq m, \ 0 < h' \leqq m + 1), \\ p_{m+1.m+1}^{(h)} = p_h, \quad (0 < h \leqq m), \qquad p_{m+1.m+1}^{(m+1)} = 0. \end{aligned}$$

Les relations (2) dépendent du système précédent comme, au § 1, les équations (4) dépendaient du système (2). Nous dirons encore que les équations linéaires (5) sont *associées* aux relations (2). Cette définition n'exige nullement, on le voit, qu'il y ait une forme quadratique T dont les coefficients soient liés aux $p_{i.k}^{(h)}$ par les identités (3). Si cette forme n'existe pas, les équations associées à (5) conservent le même aspect que celles de la mécanique, elles sont cependant beaucoup plus générales, car

1° les p_k demeurent des fonctions quelconques de $x_1, x_2, \ldots, x_m$

2° les $p_{i.k}^{(h)}$ ne sont plus assujettis qu'à ces conditions

$$(7) \qquad \sum_{(i)} p_{i.k}^{(i)} = -\frac{\partial \log \delta}{\partial x_k},$$

toujours supposées jusqu'à présent.

Elimination faite de la variable x_{m+1}, il y a, entre les x_i, $m - 2$ équations du second ordre, qu'on peut représenter ainsi

$$(8)\qquad (p_{h'}dx_{h''}-p_{h''}dx_{h'})\Big(d^2x_h-\sum_{(i.k)}p_{i.k}^{(h)}dx_idx_k\Big)$$
$$+(p_{h''}dx_h-p_hdx_{h''})\Big(d^2x_{h'}-\sum_{(i.k)}p_{i.k}^{(h')}dx_idx_k\Big)$$
$$+(p_hdx_{h'}-p_{h'}dx_h)\Big(d^2x_{h''}-\sum_{(i.k)}p_{i.k}^{(h'')}dx_idx_k\Big)=0$$

ou, d'une façon plus simple, (§ 2),

$$(8')\qquad \begin{vmatrix} p_h & dx_h & Ddx_h \\ p_{h'} & dx_{h'} & Ddx_{h'} \\ p_{h''} & dx_{h''} & Ddx_{h''} \end{vmatrix}=0;$$

il y en a une dernière, d'ordre 3, c'est la suivante

$$(9)\qquad d\log[dx_hDdx_{h'}-dx_{h'}Ddx_h]$$
$$=d\log(p_{h'}dx_h-p_hdx_{h'})+\frac{2[p_hDdx_{h'}-p_{h'}Ddx_h]}{p_hdx_{h'}-p_{h'}dx_h}.$$

Les relations (8′) et (9) sont ce que j'appellerai les équations des trajectoires.

Imaginons qu'il existe un second système linéaire, (5′), pareil à (5), qui corresponde aux mêmes trajectoires et distinguons par un accent toutes les quantités qui s'y rattachent. Soient d'ailleurs

$$(10)\qquad d\zeta=\delta^{\frac{2}{m+1}}dz,\qquad d\zeta'=\delta'^{\frac{2}{m+1}}dz'.$$

Si, dans les équations associées aux systèmes (5) et (5′) on remplace z et z', respectivement, par ζ, ζ', elles conservent la même forme, mais leurs coefficients deviennent

$$b_{i.k}^{(i)}=p_{i.k}^{(i)}+\frac{1}{m+1}\frac{\partial\log\delta}{\partial x_k},\qquad b_{i.k}^{(h)}=p_{i.k}^{(h)},\qquad b_{i.i}^{(i)}=p_{i.i}^{(i)}+\frac{2}{m+1}\frac{\partial\log\delta}{\partial x_i},$$

$$(11)\qquad (i-k\gtrless 0),\qquad (i-h)(k-h)\gtrless 0,\qquad (i,h,k\leqq m)$$

$$b_{i.k}^{\prime(i)}=p_{i.k}^{\prime(i)}+\frac{1}{m+1}\frac{\partial\log\delta'}{\partial x_k},\qquad b_{i.k}^{\prime(h)}=p_{i.k}^{\prime(h)},\qquad b_{i.i}^{\prime(i)}=p_{i.i}^{\prime(i)}+\frac{2}{m+1}\frac{\partial\log\delta'}{\partial x_i};$$

$$(12)\qquad b_h=p_h\cdot\delta^{\frac{2}{m+1}},\qquad b'_h=p'_h\cdot\delta'^{\frac{2}{m+1}},$$

en sorte que ces deux relations,

$$(13)\quad \frac{d^2x_h - \sum_{(i.k)} b_{i.k}^{(h)} dx_i dx_k - b_h d\zeta^2}{dx_h} = \frac{d^2\zeta}{d\zeta}, \quad \frac{d^2x_h - \sum_{(i.k)} b_{i.k}^{\prime(h)} dx_i dx_k - b'_h d\zeta'^2}{dx_h} = \frac{d^2\zeta'}{d\zeta'},$$

sont vérifiées à la fois, quel que soit l'indice h. J'en déduis d'abord

$$(14)\quad \Big\{\sum_{(i.k)}(b_{i.k}^{\prime(h)} - b_{i.k}^{(h)}) dx_i dx_k + b'_h d\zeta'^2 - b_h d\zeta^2\Big\} = dx_h\Big(\frac{d^2\zeta}{d\zeta} - \frac{d^2\zeta'}{d\zeta'}\Big);$$

mais l'une des équations associées au système (5) était, d'après (6),

$$dx_{m+1} d^2z - dz d^2x_{m+1} = 0$$

et l'on en conclut

$$(15)\quad dx_{m+1} = c\delta^{\frac{2}{m+1}} d\zeta,$$

la constante c étant arbitraire; il y a une égalité analogue pour $d\zeta'$. Dans l'un des deux problèmes conjugués, par exemple le premier, je puis regarder c comme choisie d'une façon définitive, car c'est achever la détermination de l'inconnue auxiliaire $d\zeta$. Parmi les relations (14), j'en considère trois, qui répondent à des indices différents et j'élimine entre elles

$$d\zeta'^2, \quad \frac{d^2\zeta'}{d\zeta'} - \frac{d^2\zeta}{d\zeta}.$$

Le premier membre de l'équation obtenue est la somme de trois quantités semblables à celle-ci

$$(b'_{h'} dx_{h''} - b'_{h''} dx_{h'})\Big[\sum_{(i.k)}(b_{i.k}^{\prime(h)} - b_{i.k}^{(h)}) dx_i dx_k - b_h d\zeta^2\Big]$$

et s'en déduisant par permutation circulaire des indices h, h', h''. On voit, en tenant compte de (15), que cette équation est une identité ou une intégrale du premier problème. Elle ne contient pas d'arbitraire, c'est donc une identité.

Par suite, les rapports

$$(16)\quad \frac{b'_h}{b_h}, \quad \frac{b_{i.k}^{\prime(h)} - b_{i.k}^{(h)}}{b_h}.$$

que contient l'équation (14), ne dépendent pas de h, en sorte qu'on peut écrire

$$(17)\qquad \frac{b'^{(h)}_{i.k} - b^{(h)}_{i.k}}{b_h} = \frac{a_{i.k}}{\beta}, \qquad \frac{b'_h}{b_h} = \frac{\beta'}{\beta}.$$

Mais, pour rendre cette conséquence bien évidente, il est nécessaire d'entrer dans quelques détails. Dans l'identité

$$(18)\qquad (b'_{h'} dx_{h''} - b'_{h''} dx_{h'})\Big[\sum_{(i.k)} (b'^{(h)}_{i.k} - b^{(h)}_{i.k}) dx_i dx_k - b_h d\zeta^2\Big] + \ldots = 0,$$

je puis annuler $dx_{h'}$, dx_h. La proposition devient ainsi manifeste, quand l'inégalité suivante

$$(i-h)(k-h) \gtrless 0$$

est vérifiée. Si j'annule ensuite $dx_{h'}$, mais non $dx_{h''}$, dx_h, j'obtiens les conditions

$$(19)\qquad b^{(i)}_{i.k} - b'^{(i)}_{i.k} = b^{(i')}_{i.k} - b'^{(i')}_{i.h} = \ldots \text{ etc.};$$

d'ailleurs on sait que, d'après (6),

$$(20)\qquad \sum_{(i)} b^{(i)}_{i.k} = \sum_{(i)} b'^{(i)}_{i.k} = 0.$$

Il en résulte que les différences (19), dont la somme est nulle, doivent toutes s'évanouir. Les termes qui leur correspondraient ne figurent donc pas dans l'équation (14) et la proposition énoncée est entièrement établie.

A cause des égalités (17), maintenant démontrées, les équations (14) se laissent représenter ainsi

$$(21)\qquad \Big[\sum_{(i.k)} a_{i.k} dx_i dx_k + \beta' d\zeta'^2 - \beta d\zeta^2\Big] \frac{b_h}{\beta dx_h} = \frac{d^2\zeta}{d\zeta} - \frac{d^2\zeta'}{d\zeta'}$$

et, devant avoir lieu quel que soit h, elles exigent

$$(22)\qquad \frac{d^2\zeta}{d\zeta} - \frac{d^2\zeta'}{d\zeta'} = 0,$$

$$(23)\qquad \sum_{(i.k)} a_{i.k} dx_i dx_k + \beta' d\zeta'^2 - \beta d\zeta^2 = 0.$$

De l'équation (22) on conclut

$$d\zeta' = a d\zeta; \tag{24}$$

la constante a est arbitraire et la relation (23) fait connaitre une intégrale quadratique du problème considéré. C'est ce qui justifie le théorème suivant:

Quand on peut passer du système (2) *à un autre semblable, en conservant les trajectoires, il y a pour ce système une intégrale quadratique.*

J'ajoute que les quantités

$$\left[\frac{1}{b_h} b_{i,k}^{(h)} - \frac{1}{b_h} b_{i,k}^{(h')}\right]^{1}_{,\zeta}$$

sont des invariants de la transformation.

Le théorème précédent a été énoncé par M. P. Painlevé, pour le cas particulier où les équations (2) sont celles d'un problème de mécanique. On voit qu'il s'applique également aux équations, beaucoup plus générales, de même aspect.

Il y a donc entre ce théorème et celui qui a fait l'objet du § 3 une différence essentielle et qu'il importe de signaler. Alors que ce dernier, d'après les considérations même qui l'ont fait obtenir, caractérisait des équations appartenant à un problème de dynamique, il n'en est nullement ainsi dans le cas actuel. L'existence d'une forme quadratique T, dont les coefficients soient liés aux $p_{i,k}^{(h)}$ par les relations (3), impose à ces dernières fonctions des conditions supplémentaires, qui ne sont point exigées pour l'existence d'une couple de systèmes (2) correspondant aux mêmes trajectoires, *ni pour celle de l'intégrale quadratique* (23).

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE, ET SUR LA THÉORIE DES INTÉGRALES INTERMÉDIAIRES

PAR

E. GOURSAT.

Le but final de ce travail est de faire connaître une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre dont on peut obtenir l'intégrale générale par l'application d'un procédé régulier, qui n'exige que l'intégration d'un système complet. Pour bien faire saisir la suite des idées, je suis obligé d'entrer d'abord dans quelques détails sur la théorie des caractéristiques et des intégrales intermédiaires.

Les principaux résultats de ce Mémoire ont été résumés dans une note présentée à l'Académie des Sciencesl e 19 mai 1891 (Comptes rendus, tome 112, p. 1117).

I.

1. Je vais d'abord rappeler les points principaux de la théorie des équations du premier ordre, en me plaçant au même point de vue que pour celles du second ordre. Etant donnée une équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \tag{1}$$

proposons-nous de déterminer une surface intégrale passant par une courbe donnée C, représentée par les équations

$$(2) \qquad x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t),$$

où $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ sont des fonctions analytiques régulières du paramètre t dans le voisinage de la valeur t_0 qui correspond à un point (x_0, y_0, z_0) de cette courbe C. S'il existe une surface intégrale de l'équation (1)

$$(3) \qquad z = \Phi(x, y),$$

passant par la courbe C, $\Phi(x, y)$ étant une fonction analytique régulière dans le voisinage de la valeur $x = x_0$, $y = y_0$, les coefficients du développement de $\Phi(x, y)$ ou, ce qui revient au même, les valeurs des dérivées successives

$$\left(\frac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m \partial y^n}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$$

pourront se calculer comme il suit. Désignons par dx, dy, dz les différentielles relatives à un déplacement le long de la courbe C; le long de cette courbe, les valeurs des dérivées partielles du premier ordre p et q doivent vérifier les deux relations

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} &F(x, y, z, p, q) = 0, \\ &dz = p\,dx + q\,dy, \end{aligned} \right.$$

qui admettent, en général, un certain nombre de systèmes de solutions communes en p et q. Prenons un de ces systèmes de solutions; il détermine une développable Δ, passant par la courbe C, à laquelle la surface cherchée, si elle existe, doit être tangente. Pour calculer les dérivées secondes r, s, t, nous avons d'une part les deux équations obtenues en différentiant l'équation (1) par rapport à x et à y successivement

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p + \frac{\partial F}{\partial p} r + \frac{\partial F}{\partial q} s = 0, \\ &\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} q + \frac{\partial F}{\partial p} s + \frac{\partial F}{\partial q} t = 0, \end{aligned} \right.$$

d'autre part la relation

$$(6) \qquad d^2z - pd^2x - qd^2y = rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2,$$

où d^2x, d^2y, d^2z désignent $f''(t)dt^2$, $\varphi''(t)dt^2$, $\psi''(t)dt^2$. On a donc trois équations linéaires en r, s, t, dont le déterminant est, en posant

$$X = \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad P = \frac{\partial F}{\partial p}, \qquad Q = \frac{\partial F}{\partial q}, \qquad Z = \frac{\partial F}{\partial z},$$

$$D = \begin{vmatrix} dx^2 & 2\,dx\,dy & dy^2 \\ P & Q & 0 \\ 0 & P & Q \end{vmatrix} = (Qdx - Pdy)^2.$$

Supposons que, pour le système de solutions adopté des équations (4), $Qdx - Pdy$ ne soit pas nul. Les équations (5) et (6) donnent alors r, s, t. En différentiant de nouveau les équations (5), on aurait les dérivées du troisième ordre, et ainsi de suite. En général, les $(n+1)$ dérivées d'ordre n sont déterminées par $(n+1)$ équations linéaires dont le déterminant est

$$D = \begin{vmatrix} dx^n & n\,dx^{n-1}dy & \frac{n(n-1)}{2}dx^{n-2}dy^2 & \ldots & dy^n \\ P & Q & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & P & Q & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & Q \end{vmatrix}.$$

Pour trouver la valeur de ce déterminant, multiplions la 1ère colonne par Q^n, la seconde par $-Q^{n-1}P$, la 3ème par $Q^{n-2}P^2$, etc. et remplaçons la première colonne par la somme de toutes les colonnes; il vient $D = (Qdx - Pdy)^n$. Si donc $Qdx - Pdy$ n'est pas nul, les valeurs de toutes les dérivées successives de z par rapport à x et à y pour $x = x_0$, $y = y_0$ sont déterminées sans ambiguïté de proche en proche. Il ne peut donc y avoir qu'une seule intégrale analytique tangente à la développable Δ le long de la courbe C.

2. Que la série ainsi obtenue soit convergente, c'est une conséquence du théorème général de Cauchy. En effet, supposons que, pour $t=t_0$, $f'(t_0)$ ne soit pas nul; on peut alors résoudre l'équation $x=f(t)$ par rapport à t, et la courbe C est aussi représentée par l'ensemble des deux équations

$$y=f_1(x), \quad z=\varphi_1(x),$$

f_1 et φ_1 étant des fonctions régulières pour $x=x_0$. Le changement de variables

$$x=X, \qquad y=f_1(X)+Y, \qquad z=\varphi_1(X)+Z$$

donne ensuite

$$q=Q, \qquad p=P-Qf'_1(X)+\varphi'_1(X),$$

et on est ramené à chercher une intégrale de la nouvelle équation

$$\mathfrak{F}=F\big(X\,,\,Y+f_1(X)\,,\,Z+\varphi_1(X)\,,\,P-Qf'_1(X)+\varphi'_1(X)\,,\,Q\big)=0$$

qui, pour $Y=0$, se réduise à $Z=0$. Si la dérivée $\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial Q}$ n'est pas nulle, l'équation précédente peut être résolue par rapport à Q, et on sait, d'après les théorèmes généraux de Cauchy, qu'il existe une intégrale $Z=\pi(X, Y)$ répondant à la question et développable dans le voisinage de $X=0$, $Y=0$. Or on a

$$\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial Q}=-\frac{\partial F}{\partial p}f'_1(X)+\frac{\partial F}{\partial q}=\frac{\partial F}{\partial q}-\frac{dy}{dx}\frac{\partial F}{\partial p};$$

si $Qdx-Pdy$ n'est pas nul, comme on l'a supposé, on aura donc aussi $\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial Q}\neq 0$.

3. Si les équations (4) admettent un système de solutions pour lequel on ait en même temps $Qdx-Pdy=0$, le raisonnement ne s'applique plus; les équations qui déterminent les dérivées successives sont incompatibles ou indéterminées. Si entre les trois équations

$$(1) \quad F(x\,,y\,,z\,,p\,,q)=0,$$

$$(4) \quad dz=pdx+qdy,$$

$$(7) \quad Qdx-Pdy=0,$$

on élimine p et q,

on est conduit à une relation

$$\Phi(x, y, z, dx, dy, dz) = 0, \tag{8}$$

qui définit des courbes gauches dépendant d'une fonction arbitraire.

S'il existe une courbe satisfaisant aux trois équations (1), (4), (7), sur une surface intégrale représentée par une équation

$$z = \Phi(x, y),$$

où Φ est une fonction développable en série entière, on peut joindre aux trois relations (1), (4), (7) deux nouvelles relations. On a, en effet,

$$X + pZ + Pr + Qs = 0,$$

$$Y + qZ + Ps + Qt = 0,$$

$dp = rdx + sdy$, $dq = sdx + tdy$; on en déduit, en tenant compte de (7),

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = \frac{-dp}{X + pZ} = \frac{-dq}{Y + qZ}. \tag{9}$$

Les valeurs de x, y, z, p, q déduites des équations (1) et (4) doivent donc satisfaire aux équations (9). Tout ceci est bien conforme aux résultats connus. Les équations (9) définissent les multiplicités caractéristiques de l'équation (1), chaque multiplicité se composant d'une courbe C et d'une développable Δ passant par cette courbe. On sait qu'il existe une infinité de surfaces intégrales tangentes à la développable Δ le long de la courbe C.

L'équation (8) définit les courbes gauches qui ont les mêmes tangentes que les courbes caractéristiques, c'est-à-dire les courbes intégrales. Or, on sait que, par toute courbe intégrale, il passe une surface intégrale admettant cette courbe pour ligne singulière.

Avant de quitter les équations du premier ordre, faisons la remarque suivante. Etant donnée une courbe C, il peut arriver qu'il passe par cette courbe C une infinité de surfaces intégrales formant un *système continu.* Nous entendons par là que ces surfaces sont représentées par une équation

$$\Phi(x, y, z, a_1, a_2, \ldots, a_q) = 0$$

dépendant d'un certain nombre de paramètres qui peuvent varier d'une manière continue. C'est ce qui aura lieu si la courbe C est une caractéristique. Mais il peut se présenter deux cas. Si l'équation (1) n'est pas linéaire en p et q, toutes les surfaces d'un système continu passant par C sont tangentes le long de C. Il n'en est plus de même en général si l'équation est linéaire. Une distinction analogue, mais plus importante, a lieu pour les équations du second ordre.

4. Prenons maintenant une équation du second ordre

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \tag{10}$$

et proposons-nous de déterminer une surface intégrale passant par une courbe donnée C et tangente à une développable Δ le long de cette courbe. En un point de C, x, y, z, p, q sont des fonctions connues d'un paramètre auxiliaire θ. Les valeurs de r, s, t en un point de C doivent satisfaire à l'équation (10) et aux deux équations

$$\left\{\begin{aligned} dp &= r dx + s dy, \\ dq &= s dx + t dy. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Ces trois équations admettent en général un certain nombre de systèmes de solutions communes en r, s, t; supposons que, pour le système choisi, le déterminant fonctionnel des trois premiers membres par rapport à r, s, t, c'est-à-dire

$$D = \begin{vmatrix} dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \\ R & S & T \end{vmatrix} = T dx^2 - S dx dy + R dy^2,$$

où on a posé

$$R = \frac{\partial F}{\partial r}, \qquad S = \frac{\partial F}{\partial s}, \qquad T = \frac{\partial F}{\partial t}$$

ne soit pas nul. On peut alors déterminer sans difficulté les valeurs de toutes les dérivées successives de z par rapport à x et à y, en un point quelconque de la courbe C. Ainsi, les dérivées partielles d'ordre n seront déterminées par $(n + 1)$ équations linéaires dont le déterminant est

$$D_1 = \begin{vmatrix} dx^n & ndx^{n-1}dy & \frac{n(n-1)}{2}dx^{n-2}dy^2 & & \cdots & dy^n & 0 \\ 0 & dx^n & ndx^{n-1}dy & & \cdots & ndxdy^{n-1} & dy^n \\ R & S & T & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & R & S & T & \cdots & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & S & T \end{vmatrix}.$$

On vérifie que l'on a $D_1 = (Tdx^2 - Sdxdy + Rdy^2)^n$; il suffit évidemment de montrer que D_1 est divisible par $(dx + \alpha dy)^n$, α désignant une racine de l'équation $T\alpha^2 + S\alpha + R = 0$. C'est ce qu'on voit en multipliant les éléments de la $2^{\text{ème}}$ colonne par α, ceux de la $3^{\text{ème}}$ par α^2, etc. et ajoutant ensuite aux éléments de la première colonne.

On voit donc que, si $Tdx^2 - Sdxdy + Rdy^2$ n'est pas nul, il y aura une seule intégrale, développable en série entière, passant par la courbe C et tangente à la développable Δ. Pour démontrer que la série dont nous venons d'apprendre à calculer les coefficients est convergente, on effectue la même transformation qu'au n° 2, et on est ramené au théorème classique de Cauchy.

5. Lorsque $Tdx^2 - Sdxdy + Rdy^2 = 0$, les équations qui déterminent les valeurs des dérivées successives peuvent être incompatibles ou indéterminées. Lorsque ce cas se présente, tout le long de la courbe C, x, y, z, p, q, r, s, t vérifient les cinq équations

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} &F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \\ &dz = pdx + qdy, \\ &dp = rdx + sdy, \\ &dq = sdx + tdy, \\ &Tdx^2 - Sdxdy + Rdy^2 = 0, \end{aligned} \right.$$

qui contiennent huit fonctions inconnues d'une variable auxiliaire. S'il existe une surface intégrale passant par la courbe C,

$$z = \Phi(x, y),$$

$\Phi(x, y)$ étant une fonction développable en série entière dans le voisinage d'un point de C, et telle que, pour cette intégrale, les valeurs de p, q, r, s, t vérifient les équations (12) le long de C, on peut ajouter aux équations (12) de nouvelles relations. Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les dérivées du troisième ordre

$$\alpha = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \qquad \beta = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \qquad \gamma = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \qquad \delta = \frac{\partial^3 z}{\partial y^3},$$

qui, dans l'hypothèse où nous nous plaçons, auront des valeurs finies. On a

$$dr = \alpha dx + \beta dy,$$
$$ds = \beta dx + \gamma dy,$$
$$dt = \gamma dx + \delta dy;$$

on en tire

$$\gamma = \frac{dt}{dx} - \delta \frac{dy}{dx},$$

$$\beta = \frac{ds}{dx} - \gamma \frac{dy}{dx} = \frac{ds}{dx} - \frac{dt}{dx}\frac{dy}{dx} + \delta \left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

$$\alpha = \frac{dr}{dx} - \beta \frac{dy}{dx} = \frac{dr}{dx} - \frac{ds}{dx}\frac{dy}{dx} + \frac{dt}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \delta \left(\frac{dy}{dx}\right)^3.$$

Portons ces valeurs de α, β, γ dans les relations

$$X + Zp + Pr + Qs + R\alpha + S\beta + T\gamma = 0,$$
$$Y + Zq + Ps + Qt + R\beta + S\gamma + T\delta = 0;$$

il vient, pour la première par exemple,

$$X + Zp + Pr + Qs + R\frac{dr}{dx} + S\frac{ds}{dx} + T\frac{dt}{dx} - R\frac{ds}{dx}\frac{dy}{dx} - S\frac{dt}{dx}\frac{dy}{dx}$$
$$+ R\frac{dt}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \delta\frac{dy}{dx}\left| R\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - S\frac{dy}{dx} + T \right| = 0,$$

et, en tenant compte de la dernière des relations (12), il reste

$$X + Zp + Pr + Qs + R\frac{dr}{dx} + \left(S - R\frac{dy}{dx}\right)\frac{ds}{dx} = 0.$$

Remplaçons $Sdx - Rdy$ par $T\frac{dx^2}{dy}$; la nouvelle équation peut s'écrire

$$(X + Zp + Pr + Qs)dxdy + Rdydr + Tdsdx = 0,$$

et on trouve de même

$$(Y + Zq + Ps + Qt)dxdy + Rdyds + Tdtdx = 0.$$

Il reste donc 7 équations entre les variables x, y, z, p, q, r, s, t

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{c} F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \\ dz = pdx + qdy, \\ dp = rdx + sdy, \\ dq = sdx + tdy, \\ Tdx^2 - Sdxdy + Rdy^2 = 0, \\ (X + Zp + Pr + Qs)dxdy + Rdydr + Tdsdx = 0, \\ (Y + Zq + Ps + Qt)dxdy + Rdyds + Tdtdx = 0. \end{array}\right.$$

Les 6 dernières équations admettent toujours, il est aisé de s'en assurer, la combinaison intégrable $dF = 0$. On peut donc négliger la relation $F = 0$, et on a 6 équations différentielles pour définir sept des variables x, y, z, p, q, r, s, t en fonction de la dernière; une des fonctions inconnues peut être choisie arbitrairement. L'ensemble d'un système de fonctions x, y, z, p, q, r, s, t d'une seule variable vérifiant les équations (13) s'appelle une *caractéristique* de l'équation (1); ces caractéristiques dépendent d'une fonction arbitraire.

6. Toute surface intégrale de l'équation (10) est un lieu de caractéristiques. Soit en effet

$$z = \Phi(x, y)$$

l'équation d'une surface intégrale; pour un point quelconque de cette surface z, p, q, r, s, t et, par suite R, S, T sont des fonctions déterminées des deux variables indépendantes x et y. L'équation différentielle du premier ordre et du second degré

$$Tdx^2 - Sdxdy + Rdy^2 = 0$$

définit donc deux familles de courbes sur cette surface; par chaque point de la surface il passe une courbe et une seule, en général, de chacune de ces deux familles. Soit C une de ces courbes; le long de C, x, y z, p, q, r, s, t sont des fonctions d'une seule variable, x par exemple, et il résulte du calcul qui vient d'être fait que ces fonctions satisfont aux équations (13). Toute surface intégrale admet ainsi un double mode de génération par des courbes caractéristiques.

Il peut arriver que les deux systèmes de caractéristiques d'une équation du second ordre soient confondus; il faut pour cela que l'on ait

$$S^2 - 4RT = 0, \tag{14}$$

soit identiquement, soit en tenant compte de l'équation (10). Cette condition s'interprète géométriquement comme il suit. Regardons x, y, z, p, q comme des paramètres, r, s, t comme les coordonnées cartésiennes d'un point; l'équation (10) représente alors une certaine surface Σ. Le plan mené par l'origine parallèlement à un plan tangent à cette surface a pour équation

$$Rr + Ss + Tt = 0,$$

et la relation (14) exprime précisément que ce plan coupe le cône (T) représenté par l'équation

$$s^2 - rt = 0$$

suivant deux génératrices confondues. Donc, *pour que les deux systèmes de caractéristiques soient confondus, il faut et il suffit que l'équation* (10), *où l'on regarde x, y, z, p, q comme des paramètres et r, s, t comme des coordonnées courantes, représente une surface développable, dont le plan tangent est constamment parallèle à un plan tangent au cône (T), qui a pour équation $s^2 - rt = 0$.*

7. Il resterait à examiner si à toute caractéristique, c'est-à-dire à tout système de solutions des équations (13), correspond une infinité de surfaces intégrales ayant un contact du second ordre tout le long de la courbe caractéristique. Je laisserai cette question de côté dans ce travail, pour m'occuper d'un problème tout différent. Etant donnée une équation du second ordre, cherchons s'il existe des courbes C jouissant de la propriété suivante: par la courbe C passent une infinité de surfaces

intégrales, formant un système continu, ayant un contact *du premier ordre* seulement le long de cette courbe. S'il en est ainsi, les valeurs de x, y, z, p, q seront les mêmes pour toutes ces surfaces le long de la courbe C; il faudra donc que les équations

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \tag{10}$$

$$\begin{cases} dp = r\,dx + s\,dy, \\ dq = s\,dx + t\,dy, \end{cases} \tag{11}$$

qui déterminent r, s, t, admettent une infinité de systèmes de solutions formant un système continu. Pour résoudre ces trois équations, on peut tirer les valeurs de r et de t des deux dernières, et les porter dans la première équation, d'où l'on tirera la valeur de s. En écrivant que cette équation se réduit à une identité, on est conduit à un certain nombre de relations entre $x, y, z, p, q, dx, dy, dp, dq$. Plusieurs cas peuvent se présenter: 1° il peut arriver que ces équations soient incompatibles (c'est le cas général); 2° il peut arriver que l'on trouve une ou plusieurs conditions ne renfermant que x, y, z, p, q; 3° il peut arriver que les équations de condition renferment toutes quelques-unes des différentielles dx, dy, dp, dq et, dans ce cas, il pourra y avoir deux ou trois relations distinctes, car elles sont forcément homogènes en dx, dy, dp, dq.

Géométriquement, les résultats s'interprètent comme il suit. Regardons encore $x, y, z, p, q, dx, dy, dp, dq$ comme des paramètres et r, s, t comme des coordonnées courantes. Les équations (11) représentent une droite parallèle à une génératrice du cône (T); pour que l'équation en s obtenue en remplaçant r et t par leurs valeurs dans (10) se réduise à une identité, il faut donc que la surface Σ admette des génératrices rectilignes parallèles aux génératrices du cône (T). Si la fonction $F(x, y, z, p, q, r, s, t)$ est arbitraire, il est clair que cela n'aura jamais lieu, quels que soient les valeurs des paramètres x, y, z, p, q. Cela peut aussi arriver si les paramètres x, y, z, p, q vérifient certaines conditions. Enfin il peut se faire que, quels que soient x, y, z, p, q, la surface Σ admette des génératrices parallèles à celles du cône (T). Ce cas se subdivise lui-même en deux autres, suivant que ces génératrices forment un système continu ou non. Dans le premier cas, il y a deux

relations distinctes entre $x, y, z, p, q, dx, dy, dp, dq$ pour que la droite représentée par les équations (11) appartienne à la surface Σ, qui est alors une surface réglée admettant le cône (T) pour cône des directions asymptotiques. Si les génératrices rectilignes de Σ, parallèles aux génératrices de (T), ne forment pas un système continu, les paramètres $x, y, z, p, q, dx, dy, dp, dq$ doivent vérifier trois relations distinctes.

Plaçons-nous dans le cas où l'équation (10) représente, quels que soient x, y, z, p, q une surface réglée ayant le cône (T) pour cône des directions asymptotiques. Les équations d'une droite parallèle à une génératrice de (T) peuvent s'écrire

$$(15) \qquad \left\{ \begin{array}{l} r = ms + \mu, \\ s = mt + \nu; \end{array} \right.$$

soient

$$(16) \qquad G(x, y, z, p, q; m, \mu, \nu) = 0, \qquad G_1(x, y, z, p, q; m, \mu, \nu) = 0$$

les relations qui expriment que cette droite est une génératrice de la surface Σ. Pour identifier les équations (11) et (15), il suffit de poser

$$m = -\frac{dy}{dx}, \qquad \mu = \frac{dp}{dx}, \qquad \nu = \frac{dq}{dx};$$

remplaçons m, μ, ν par ces valeurs dans les formules (16), nous trouvons deux équations, homogènes en dx, dy, dp, dq,

$$(17) \qquad \left\{ \begin{array}{l} H(x, y, z, p, q; dx, dy, dp, dq) = 0, \\ H_1(x, y, z, p, q; dx, dy, dp, dq) = 0, \end{array} \right.$$

qui expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations (10) et (11) admettent une infinité de solutions en r, s, t formant un système continu. Soient

$$x = f_1(\lambda), \qquad y = f_2(\lambda), \qquad z = f_3(\lambda), \qquad p = \varphi_1(\lambda), \qquad q = \varphi_2(\lambda),$$
$$r = \psi_1(\lambda), \qquad s = \psi_2(\lambda), \qquad t = \psi_3(\lambda)$$

un système de solutions des équations (10), (11), (17); ce système de fonctions forme une caractéristique. Il suffit de montrer que l'on a

$$Tdx^2 - Sdxdy + Rdy^2 = 0;$$

or, si l'on revient à la représentation géométrique employée plus haut, on voit que $dy^2, -dxdy, dx^2$ sont proportionnels aux coefficients angulaires de la génératrice (11), tandis que R, S, T sont les coefficients directeurs du plan tangent à Σ, et la relation qu'il s'agit de vérifier exprime simplement que la génératrice est située dans le plan tangent.

Si on a choisi pour x, y, z, p, q des fonctions d'une seule variable vérifiant les équations (17) et la relation

$$dz = pdx + qdy,$$

on peut encore choisir arbitrairement une des trois dérivées r, s, t, de sorte que l'indétermination se manifeste dès le second ordre. Ainsi, tandis que, pour l'équation générale du second ordre, deux surfaces intégrales tangentes le long d'une caractéristique ont un contact du second ordre au moins le long de cette caractéristique, pour la classe spéciale d'équations qui vient d'être définie, deux surfaces intégrales peuvent n'avoir qu'un contact du premier ordre le long d'une caractéristique. Cette distinction est analogue à celle qui a été faite pour les équations du premier ordre, mais plus essentielle, car elle se conserve par toute transformation de contact.

Pour abréger, nous désignerons ces deux espèces de caractéristiques sous les noms de caractéristiques *du premier ordre* ou du *second ordre* respectivement.

8. Ceci nous conduit à une classification des équations aux dérivées partielles du second ordre, basée sur la distinction des deux espèces de caractéristiques:

1° les équations générales qui admettent deux systèmes différents de caractéristiques, tous les deux du second ordre;

2° les équations qui, quand on y regarde x, y, z, p, q comme des paramètres, r, s, t comme les coordonnées courantes, représentent une surface réglée, *non développable,* admettant le cône (T) pour cône des directions asymptotiques. Elles admettent encore deux systèmes différents de caractéristiques, un du premier ordre, un du second ordre;

3° les équations qui, avec les mêmes conventions, représentent une surface développable, dont le plan tangent reste constamment parallèle à

un plan tangent au cône (T). Les deux systèmes de caractéristiques sont confondus, et ce système unique est du premier ordre;

4° les équations linéaires en $r, s, t, rt - s^2$,

$$A(rt - s^2) + Br + Cs + Dt + E = 0;$$

les surfaces Σ admettent ici deux systèmes de génératrices, en général distincts, parallèles aux génératrices de (T). Il y a donc deux systèmes de caractéristiques, tous les deux du premier ordre.

On voit le rôle particulier que jouent les équations d'Ampère dans la théorie générale. Il paraît naturel d'étudier, après celles-là, les équations de la seconde et de la troisième catégorie.

II.

9. Dans ce qui va suivre, il sera question, presque exclusivement, des équations qui admettent au moins un système de caractéristiques du premier ordre. Rappelons d'abord quelques définitions empruntées à la théorie des transformations de contact de M. Sophus Lie. Un *élément* (x, y, z, p, q) se compose d'un point (x, y, z) et d'un plan de coefficients angulaires p, q

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

passant par ce point. Deux éléments infiniment voisins (x, y, z, p, q) et $(x + dx, y + dy, z + dz, p + dp, q + dq)$ sont *unis* lorsque le point du second élément est situé dans le plan du premier, c'est-à-dire lorsque l'on a

$$dz = pdx + qdy.$$

Une multiplicité M est une multiplicité d'éléments telle que deux éléments infiniment voisins sont toujours unis. Ces multiplicités peuvent être à une ou à deux dimensions. Une multiplicité M_1 se compose en général d'une courbe C et des plans tangents à une certaine développable Δ passant par C; nous dirons quelquefois, pour abréger, que la courbe

C sert de *support* à la multiplicité M_1. Comme cas particulier, il peut arriver qu'une multiplicité M_1 se compose d'un point et de l'ensemble des plans tangents à un certain cône ayant son sommet en ce point. Une multiplicité M_2 se compose, soit d'une surface et de l'ensemble de ses plans tangents, soit d'une courbe et de l'ensemble des plans qui passent par une tangente quelconque à cette courbe, soit d'un point et de l'ensemble des plans qui passent par ce point. Il est clair que toute multiplicité M_2 peut être considérée comme un lieu de multiplicités M_1, dépendant d'un paramètre. Mais la réciproque n'est pas vraie. Considérons une famille de multiplicités M_1 dépendant d'un paramètre λ. Lorsque λ varie, la courbe C qui sert de support à la multiplicité M_1 engendre une surface S, et la multiplicité M_2 composée de la surface S et de l'ensemble de ses plans tangents n'est pas, en général, le lieu des multiplicités M_1. Il faut en outre que la développable $\varDelta$ qui constitue avec la courbe C la multiplicité variable M_1 soit tangente à la surface S tout le long de C. Désignons par δ les différentielles x, y, z, p, q prises par rapport au paramètre variable λ; il faudra que l'on ait aussi

$$\delta z = p\delta x + q\delta y.$$

10. Soit

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \tag{18}$$

une équation du second ordre qui représente une surface réglée Σ, ayant ses génératrices parallèles à celles du cône (T), quand on y regarde x, y, z, p, q comme des paramètres et r, s, t comme des coordonnées courantes. Cette équation provient de l'élimination de m, μ, ν entre les quatre équations

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} r &= ms + \mu, \\ s &= mt + \nu, \\ G(x, y, z, p, q; m, \mu, \nu) &= 0, \\ G_1(x, y, z, p, q; m, \mu, \nu) &= 0. \end{aligned}\right.$$

Remplaçons m, μ, ν par $-\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dp}{dx}, \dfrac{dq}{dx}$ respectivement; nous appellerons

multiplicité caractéristique de l'équation (18) toute multiplicité M_1 dont les éléments vérifient les relations

$$(20)\qquad \left|\begin{array}{l} dz = p\,dx + q\,dy, \\ G\left(x, y, z, p, q; -\frac{dy}{dx}, \frac{dp}{dx}, \frac{dq}{dx}\right) = 0, \\ G_1\left(x, y, z, p, q; -\frac{dy}{dx}, \frac{dp}{dx}, \frac{dq}{dx}\right) = 0. \end{array}\right.$$

D'après ce qu'on a vu plus haut (n° 7), s'il existe une infinité de surfaces intégrales, formant un système continu, tangentes à une développable Δ le long d'une courbe C et ayant seulement un contact du premier ordre deux à deux, la courbe C et la développable Δ forment une multiplicité caractéristique.

L'équation (18) provient de l'élimination de m entre les deux équations

$$(21)\qquad \left|\begin{array}{l} G(x, y, z, p, q; m, r - ms, s - mt) = 0, \\ G_1(x, y, z, p, q; m, r - ms, s - mt) = 0, \end{array}\right.$$

ou, ce qui revient au même, de $\frac{dy}{dx}$ entre les deux équations

$$(22)\qquad \left|\begin{array}{l} G\left(x, y, z, p, q; -\frac{dy}{dx}, r + s\frac{dy}{dx}, s + t\frac{dy}{dx}\right) = 0, \\ G_1\left(x, y, z, p, q; -\frac{dy}{dx}, r + s\frac{dy}{dx}, s + t\frac{dy}{dx}\right) = 0; \end{array}\right.$$

toute surface intégrale est donc un lieu de multiplicités M_1, car, pour une telle surface, z, p, q, r, s, t sont des fonctions déterminées de x et de y, et les deux équations (22) admettent une solution commune en $\frac{dy}{dx}$,

$$(23)\qquad \frac{dy}{dx} = \pi(x, y).$$

Par chaque point de la surface intégrale S, il passe une courbe C satisfaisant à l'équation (23). Quand on se déplace sur cette courbe, y, z, p, q, r, s, t sont des fonctions de x vérifiant les équations (22) et, par suite, les équations (20). Inversement, touté multiplicité M_2, formée d'une

surface et de ses plans tangents, qui est un lieu de multiplicités caractéristiques M_1, définit une surface intégrale.

Pour plus de symétrie, écrivons les équations (20)

$$(24)\qquad \begin{cases} dz = pdx + qdy, \\ H(x, y, z, p, q; dx, dy, dp, dq) = 0, \\ H_1(x, y, z, p, q; dx, dy, dp, dq) = 0, \end{cases}$$

H et H_1 étant des fonctions homogènes de dx, dy, dp, dq. Le problème de l'intégration de l'équation du second ordre (18) peut alors être posé ainsi: *Trouver toutes les multiplicités M_2, composées de multiplicités caractéristiques M_1, satisfaisant aux équations* (24).

11. Cette façon d'énoncer le problème permet de tenir compte de certaines intégrales exceptionnelles, qui ne forment pas de surfaces. Considérons, par exemple, l'équation

$$(25)\qquad s + f(x, y, z, p, q) = 0;$$

on a, pour un des systèmes de caractéristiques,

$$dz = pdx + qdy, \qquad dx = 0, \qquad dp + f(x, y, z, p, q)dy = 0,$$

équations qui sont satisfaites en prenant

$$x = x_0, \qquad y = y_0, \qquad z = z_0, \qquad p = p_0,$$

x_0, y_0, z_0, p_0 étant des constantes quelconques. On a donc une famille de multiplicités caractéristiques M_1 en prenant un point arbitraire (x_0, y_0, z_0) et l'ensemble des plans passant par une droite issue de ce point parallèle au plan des xz. Toute multiplicité M_2 formée d'une courbe plane située dans un plan parallèle au plan des xz et de ses plans tangents est évidemment formée de multiplicités M_1; c'est donc une intégrale de l'équation (25). De pareilles intégrales ne sont point à négliger, car il suffit d'une transformation de contact pour les ramener à des intégrales ordinaires. Ainsi, dans le cas actuel, la transformation de Legendre

$$X = p, \qquad Y = q, \qquad x = P, \qquad y = Q, \qquad Z = px + qy - z$$

appliquée à l'équation (25) conduit à la nouvelle équation

$$(26) \qquad S + (S^2 - RT)f(P, Q, PX + QY - Z, X, Y) = 0,$$

P, Q, R, S, T désignant les dérivées partielles du premier et du second ordre de Z par rapport à X et à Y. Les intégrales M_2 de l'équation (25), trouvées plus haut, vérifient l'équation $y = C$; après la transformation de Legendre elles se changent en des intégrales de l'équation $Q = C$. On vérifie en effet que toutes les intégrales de l'équation $Q = C$ appartiennent bien à l'équation (26). Or l'équation $Q = C$ admet pour intégrales de véritables surfaces.

12. Regardons, dans les équations (24) x, y, z, p, q comme des paramètres et dx, dy, dp, dq comme les coordonnées homogènes d'un point. Les relations $H = 0$, $H_1 = 0$, représentent une courbe gauche Γ. Quand on effectue sur l'équation proposée une transformation de contact

$$x = X(x', y', z', p', q'),$$

$$y = Y(x', y', z', p', q'),$$

$$z = Z(x', y', z', p', q'),$$

$$p = P(x', y', z', p', q'),$$

$$q = Q(x', y', z', p', q'),$$

on a pour dx, dy, dp, dq des expressions linéaires en dx', dy', dp', dq',

$$dx = \frac{\partial X}{\partial x} dx' + \frac{\partial X}{\partial y} dy' + \frac{\partial X}{\partial z}(p'dx' + q'dy') + \frac{\partial X}{\partial p} dp' + \frac{\partial X}{\partial q} dq',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et la courbe Γ', correspondante à la nouvelle équation, se déduit de la courbe Γ par une transformation homographique.

Lorsque la courbe Γ est une ligne droite, les équations (24) sont linéaires en dx, dy, dp, dq et l'équation correspondante est linéaire en $r, s, t, rt - s^2$. Supposons, par exemple, que des équations (24) on ne puisse déduire aucune combinaison linéaire, ne renfermant ni dp, ni dq; les équations (24) peuvent alors être résolues par rapport à dp et dq,

$$(27) \qquad \left| \begin{aligned} & dp + A dx + B dy = 0, \\ & dq + C dx + D dy = 0. \end{aligned} \right.$$

En remplaçant dp et dq par $rdx + sdy$, $sdx + tdy$ et éliminant $\frac{dy}{dx}$, on est conduit à l'équation

$$(r + A)(t + D) - (s + B)(s + C) = 0,$$

ou

$$(28) \qquad rt - s^2 + At + Dr - (B + C)s + AD - BC = 0.$$

Inversement, toute équation linéaire en $rt - s^2$, r, s, t peut se mettre sous la forme (28), pourvu que le coefficient de $rt - s^2$ ne soit pas nul. Cette équation étant symétrique en B et C, le second système de caractéristiques s'obtient en permutant B et C dans les équations (27). Conformément à la théorie générale, ces deux systèmes de caractéristiques sont confondus si $B = C$, c'est-à-dire si l'équation (28) représente un cône ayant ses génératrices parallèles au cône (T).

Lorsque les équations (24), linéaires en dx, dy, dp, dq, ne peuvent être résolues par rapport à dp et dq, l'équation (28) correspondante est linéaire en r, s, t et ne contient pas $rt - s^2$. Inversement, à toute équation

$$Er + 2Fs + Gt + H = 0$$

correspondent deux systèmes de caractéristiques que l'on déduit des deux relations

$$\left| \begin{aligned} & E dp dy + G dq dx + H dx dy = 0, \\ & E dy^2 - 2F dx dy + G dx^2 \quad = 0. \end{aligned} \right.$$

Si les équations des caractéristiques sont linéaires en dx, dy, dp, dq, elles restent linéaires après une transformation de contact quelconque. D'où l'on conclut cette propriété remarquable et bien connue, que les équations du second ordre linéaires en r, s, t, $rt - s^2$ restent linéaires après une transformation de contact.

13. Les considérations qui précèdent permettent de retrouver d'une façon presque intuitive un certain nombre de résultats connus. Considérons une famille de surfaces S dépendant de 3 paramètres a, b, c,

$$\Phi(x, y, z, a, b, c) = 0;$$

si on établit entre ces trois paramètres deux relations de forme arbitraire $b = f(a)$, $c = \varphi(a)$, la famille de surfaces à un paramètre

$$\Phi(x, y, z, a, f(a), \varphi(a)) = 0$$

admet une surface enveloppe E. Toutes ces surfaces E vérifient, quelles que soient les fonctions $f(a)$, $\varphi(a)$, une même équation aux dérivées partielles du second ordre. En effet, la courbe de contact de la surface S avec son enveloppe est représentée par les deux équations

$$(29) \qquad \begin{cases} \Phi(x, y, z, a, f(a), \varphi(a)) = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial a} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial f(a)} f'(a) + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \varphi(a)} \varphi'(a) = 0, \end{cases}$$

et les valeurs de p et de q le long de cette courbe sont données par les deux équations

$$(30) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} p = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} q = 0. \end{cases}$$

Si on regarde, dans ces relations, $a, f(a), \varphi(a), f'(a), \varphi'(a)$ comme données, on a une famille de multiplicités M_1 dépendant de 5 paramètres, et il est clair que toute surface enveloppe E est un lieu de multiplicités M_1. Il nous suffit donc de démontrer que toutes ces multiplicités M_1 satisfont à deux relations de la forme (22). Soient, d'une manière générale,

$$(31) \qquad \begin{cases} y = f_1(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5), \\ z = f_2(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5), \\ p = f_3(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5), \\ q = f_4(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5) \end{cases}$$

les équations d'une famille de multiplicités M_1 à 5 paramètres, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5$. Si, entre les 4 équations (31) et les quatre équations

$$dy = f_1'(x)dx, \qquad dz = f_2'(x)dx, \qquad dp = f_3'(x)dx, \qquad dq = f_4'(x)dx.$$

on élimine les cinq paramètres α_i, il reste trois relations entre $x, y, z, p, q,$

$dx, dy, dz, dq; dp$. L'une de ces relations est précisément $dz = pdx + qdy$, et il reste deux autres équations distinctes de celles-là.

Dans le cas actuel, on peut effectuer le calcul comme il suit. Des équations (29) et (30) on déduit

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz = 0,$$

$$d\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + pd\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dp = 0,$$

$$d\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + qd\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dq = 0;$$

imaginons qu'on tire $a, f(a), \varphi(a)$ des équations

$$\Phi = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + p\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} + q\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0,$$

et qu'on les porte dans les précédentes, il reste

$$dz - pdx - qdy = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} dp + \left\{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} p + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} p^2\right\} dx + \left\{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + p\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} + q\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} + pq\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right\} dy = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} dq + \left\{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + p\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} + q\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} + pq\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right\} dx + \left\{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} q + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} q^2\right\} dy = 0.$$

On a deux équations de la forme

$$dp = Adx + Bdy,$$

$$dq = Bdx + Ddy,$$

ce qui conduit (n° 12) à une équation linéaire en $rt - s^2, r, s, t$, pour laquelle les deux systèmes de caractéristiques sont confondus. Les équations ainsi obtenues sont, comme on sait, caractérisées par ce fait que les équations des caractéristiques admettent trois combinaisons intégrables.

De même, si on a un complexe de courbes

$$f(x, y, z, a, b, c) = 0,$$

$$\varphi(x, y, z, a, b, c) = 0,$$

les surfaces obtenues en associant les courbes de ce complexe suivant une loi quelconque satisfont à une équation linéaire en r, s, t. On passe d'ailleurs de ce cas au précédent par une transformation de contact.

14. Voici un autre exemple qui généralise l'équation des surfaces minima. Soient deux familles de courbes C et C_1 définies comme il suit: les tangentes aux courbes C sont parallèles aux génératrices d'un certain cône ou, ce qui revient au même, ces courbes satisfont à une équation de la forme

$$f(dx, dy, dz) = 0,$$

ne contenant pas x, y, z. De même les courbes de la seconde famille satisfont à une relation de même forme

$$\varphi(dx, dy, dz) = 0,$$

qui peut être identique à la première. Soit C une courbe de la première famille, C_1 une courbe de la seconde. Joignons un point quelconque m de la courbe C à un point quelconque m_1 de la courbe C_1; le milieu P de la droite mm_1 décrit une surface S. Lorsque le point m reste fixe, m_1 décrivant la courbe C_1, le point P décrit une courbe Γ_1 homothétique à C_1; de même, lorsque m décrit la courbe C, m_1 restant fixe, le point P décrit une courbe Γ homothétique à C. Le long de la courbe Γ le plan tangent à la surface S est un cylindre ayant ses génératrices parallèles à la tangente au point m_1 à la courbe C_1. Considérons les multiplicités M_1 formées d'une courbe Γ satisfaisant à l'équation

$$f(dx, dy, dz) = 0$$

et des plans tangents à un cylindre passant par Γ et ayant ses génératrices parallèles à une tangente de la courbe C_1. L'intersection de deux plans tangents infiniment voisins

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

$$(X - x)dp + (Y - y)dq = 0,$$

a pour paramètres directeurs $dq, -dp, pdq - qdp$. Les multiplicités M_1 vérifient donc les 3 relations

$$dz = pdx + qdy,$$

$$f(dx, dy, dz) = 0,$$

$$\varphi(dq, -dp, pdq - qdp) = 0;$$

on en tire

$$dy + A(p, q)dx = 0,$$

$$dp + B(p, q)dq = 0.$$

Remplaçons dp par $rdx + sdy$, dq par $sdx + tdy$ et éliminons $\frac{dy}{dx}$; on est conduit à une équation linéaire en r, s, t

$$E(p, q)r + 2F(p, q)s + G(p, q)t = 0, \tag{32}$$

dont les coefficients ne dépendent que de p et de q, à laquelle satisfont toutes les surfaces S.

Inversement, pour qu'une équation de la forme (32) puisse être intégrée par la méthode précédente, il faut et il suffit qu'on puisse éliminer p et q entre les deux équations

$$dz = pdx + qdy,$$

$$Edy^2 - 2Fdxdy + Gdx^2 = 0,$$

qui conviennent aux caractéristiques.

III.

15. Etant donnée une équation du second ordre (E), on appelle *intégrale intermédiaire* toute équation du premier ordre

$$V(x, y, z, p, q) = 0 \tag{33}$$

dont toutes les intégrales, sauf peut-être quelques intégrales exceptionnelles, appartiennent à l'équation du second ordre proposée. Considérons

une multiplicité caractéristique M_1 de l'équation (33); il existe, comme on sait, une infinité d'intégrales de l'équation (33) passant par la multiplicité M_1, ou, d'une façon plus précise, une infinité de surfaces intégrales de l'équation (33), formant des systèmes continus, passant par la courbe caractéristique C et ayant entre elles un contact *du premier ordre* seulement tout le long de C. L'équation du second ordre E doit donc appartenir à la catégorie particulière des équations du second ordre dont il a eté question au n° 7; ce qui nous montre déjà qu'une équation du second ordre, *prise arbitrairement,* n'admet pas d'intégrale intermédiaire.

Soit donc (E) une équation du second ordre, admettant des multiplicités caractéristiques du premier ordre. Ces multiplicités caractéristiques doivent vérifier un certain nombre de relations

$$H_1(x, y, z, p, q; dx, dy, dp, dq) = 0, \qquad H_2 = 0, \quad \ldots \tag{34}$$

homogènes en dx, dy, dp, dq. D'autre part, les multiplicités caractéristiques de l'équation (33) satisfont aux équations connues

$$\frac{dx}{\frac{\partial V}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial V}{\partial q}} = \frac{-dp}{\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z}} = \frac{-dq}{\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}}; \tag{35}$$

remplaçons dans les équations (34), dx, dy, dp, dq par les quantités proportionnelles tirées des équations (35), et nous sommes conduits à un certain nombre d'équations de condition homogènes en $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}, \frac{\partial V}{\partial p}, \frac{\partial V}{\partial q}$,

$$K_1\left(x, y, z, p, q; \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}, \frac{\partial V}{\partial p}, \frac{\partial V}{\partial q}\right) = 0, \qquad K_2 = 0, \quad \ldots. \tag{36}$$

La recherche des intégrales intermédiaires est donc ramenée à la recherche des fonctions $V(x, y, z, p, q)$ qui satisfont à un système d'équations simultanées du premier ordre.

16. On arrive aisément au même résultat par un calcul direct. Soit

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \tag{37}$$

une équation du second ordre, dont $V = 0$ est une intégrale intermédiaire. De l'équation $V = 0$, on tire

$$(38)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} + p\dfrac{\partial V}{\partial z} + \dfrac{\partial V}{\partial p} r + \dfrac{\partial V}{\partial q} s = 0, \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} + q\dfrac{\partial V}{\partial z} + \dfrac{\partial V}{\partial p} s + \dfrac{\partial V}{\partial q} t = 0; \end{cases}$$

si on pouvait résoudre les équations (37) et (38) par rapport à r, s, t, l'équation (37) ne pourrait admettre toutes les intégrales de $V = 0$, car on aurait r, s, t et, par suite, toutes les dérivées d'ordre supérieur, exprimées au moyen de x, y, z, p, q. Les intégrales de $V = 0$, qui appartiennent à l'équation (37), dépendraient de *cinq* constantes arbitraires au plus. Il faudra donc qu'en tirant r et t des équations (38) et portant ces valeurs dans l'équation (37), le resultat soit indépendant de s. En poursuivant le raisonnement, on est conduit, il est facile de le voir, aux mêmes résultats que par la première méthode.

Considérons en particulier les équations (37) qui admettent des intégrales intermédiaires, dépendant de deux paramètres *essentiels* a, b,

$$(39)\quad V(x, y, z, p, q, a, b) = 0;$$

l'équation (37) doit résulter de l'élimination de a et b entre les trois relations (39) et (40)

$$(40)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} + p\dfrac{\partial V}{\partial z} + r\dfrac{\partial V}{\partial p} + s\dfrac{\partial V}{\partial q} = 0, \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} + q\dfrac{\partial V}{\partial z} + s\dfrac{\partial V}{\partial p} + t\dfrac{\partial V}{\partial q} = 0. \end{cases}$$

Si on regarde dans ces dernières, x, y, z, p, q comme des constantes données *quelconques*, et r, s, t comme des coordonnées courantes, elles représentent une droite parallèle à une génératrice du cône (T)

$$rt - s^2 = 0.$$

L'équation (37) doit donc représenter une surface réglée (Σ) dont les génératrices sont parallèles à celles du cône (T), quelles que soient les valeurs, supposées constantes, de x, y, z, p, q.

Inversement, étant donnée une équation (E) de cette espèce, elle

admet un système de multiplicités caractéristiques du premier ordre défini par deux équations homogènes en dx, dy, dp, dq

$$H(x, y, z, p, q; dx, dy, dp, dq) = 0,$$

$$H_1(x, y, z, p, q; dx, dy, dp, dq) = 0;$$

pour obtenir les relations auxquelles doit satisfaire une intégrale intermédiaire V, il suffit d'y remplacer dx, dy, dp, dq par $\frac{\partial V}{\partial p}, \frac{\partial V}{\partial q}, -\left(\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z}\right), -\left(\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}\right)$ *respectivement.* Il résulte des développements du n° 10 que cette règle peut être remplacée par la suivante: *soient*

$$\varphi(x, y, z, p, q; \lambda, \mu, \nu, \rho) = 0, \qquad \psi(x, y, z, p, q; \lambda, \mu, \nu, \rho) = 0$$

les conditions, homogènes en λ, μ, ν, ρ, pour que la droite

$$\lambda + \mu r + \nu s = 0,$$

$$\rho + \mu s + \nu t = 0$$

soit une génératrice de la surface (Σ) représentée par l'équation (E). On remplace dans ces équations λ, ρ, μ, ν par $\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z}, \frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}, \frac{\partial V}{\partial p}, \frac{\partial V}{\partial q}$ *respectivement.*

17. Les équations auxquelles on est conduit sont homogènes par rapport à $\frac{\partial V}{\partial p}, \frac{\partial V}{\partial q}, \frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z}, \frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}$. Si l'équation a la forme d'Ampère, les équations qui déterminent V sont *linéaires,* et si on connaît deux intégrales intermédiaires V_1, V_2, on en déduit une intégrale dépendant d'une fonction arbitraire $\varphi(V_1, V_2) = 0$. De même, dans le cas général, si on connaît une intégrale intermédiaire dépendant de deux constantes arbitraires a, b,

$$V(x, y, z, p, q, a, b) = 0,$$

Bour a déjà remarqué que l'on pouvait en déduire une intégrale intermédiaire dépendant d'une fonction arbitraire, par la méthode de la va-

riation des constantes. C'est une simple conséquence de ce que la fonction V est déterminée par des équations du premier ordre. En effet, considérons les trois équations

$$V = 0, \qquad b = \varphi(a), \qquad \frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b}\varphi'(a) = 0,$$

où $\varphi(a)$ désigne une fonction arbitraire de a; si on tire a et b des deux dernières équations et qu'on porte ces valeurs dans la première, on est conduit à une nouvelle équation

$$V_1 = 0,$$

qui est aussi une intégrale intermédiaire, car les dérivées partielles $\frac{\partial V_1}{\partial x}$, $\frac{\partial V_1}{\partial y}$, $\frac{\partial V_1}{\partial z}$, $\frac{\partial V_1}{\partial p}$, $\frac{\partial V_1}{\partial q}$ ont les mêmes expressions que $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$, $\frac{\partial V}{\partial p}$, $\frac{\partial V}{\partial q}$. La fonction V_1 satisfait donc bien aux mêmes équations que V.

La remarque de Bour peut être complétée comme il suit. Etant donnée une équation du second ordre (E), qui admet une intégrale intermédiaire avec deux constantes arbitraires $V(x, y, z, p, q, a, b)$, proposons-nous de déterminer une intégrale intermédiaire, dont une solution soit tangente à une courbe *donnée* C le long d'une développable *donnée* Δ, passant par cette courbe. Le long de C, x, y, z, p, q sont cinq fonctions supposées connues d'une variable λ, vérifiant la relation $dz = p\,dx + q\,dy$. La fonction arbitraire $\varphi(a)$ doit satisfaire aux deux relations

$$(41) \qquad \begin{cases} V(x, y, z, p, q, a, \varphi(a)) = 0, \\ \dfrac{\partial V}{\partial a} + \dfrac{\partial V}{\partial b}\varphi'(a) = 0, \end{cases}$$

où on suppose x, y, z, p, q remplacées par leurs valeurs en fonction de λ. Si on différentie la première des équations (41) en tenant compte de la seconde, il vient

$$(42) \qquad \frac{\partial V}{\partial x}x' + \frac{\partial V}{\partial y}y' + \frac{\partial V}{\partial z}z' + \frac{\partial V}{\partial p}p' + \frac{\partial V}{\partial q}q' = 0,$$

x', y', z', p', q' désignant les dérivées par rapport à λ. En éliminant λ entre les équations (42) et $V = 0$, on est conduit à une équation

$$\Phi(a, \varphi(a)) = 0$$

qui détermine la fonction inconnue $\varphi(a)$.[1]

18. Appliquons ce qui précède à quelques exemples. Considérons d'abord l'équation élémentaire

$$s = 0,$$

et proposons-nous de déterminer une intégrale de cette équation passant par une courbe C et ayant un plan tangent donné tout le long de cette courbe. Soient

$$x = f_1(\lambda), \qquad y = f_2(\lambda), \qquad z = f_3(\lambda), \qquad p = \varphi_1(\lambda), \qquad q = \varphi_2(\lambda),$$

---

[1] Quand on élimine λ entre les deux équations (41), on est conduit à une équation du premier ordre pour déterminer $\varphi(a)$

(e) $$R(a, \varphi(a), \varphi'(a)) = 0.$$

Il semble donc que l'on devrait trouver une infinité de fonctions $\varphi(a)$ répondant à la question. Pour expliquer cette apparente contradiction, imaginons qu'on ait remplacé x, y, z, p, q en fonction de λ et soit $V(x, y, z, p, q, a, b) = U(\lambda, a, b)$. Les équations (41) deviennent

(41') $$U(\lambda, a, \varphi(a)) = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial a} + \frac{\partial U}{\partial \varphi(a)} \varphi'(a) = 0,$$

et la question revient à déterminer $\varphi(a)$ de telle sorte que les équations (41') aient une solution commune en a, quelle que soit la valeur de λ. Or, si on remplace λ par une constante arbitraire λ_0, la fonction $\varphi(a)$ définie par l'équation

$$U(\lambda_0, a, \varphi(a)) = 0$$

répond à la question, car on a aussi $\frac{\partial U}{\partial a} + \frac{\partial U}{\partial \varphi(a)} \varphi'(a) = 0$. On a ainsi l'intégrale *générale* de l'équation (e), mais il y a aussi une intégrale *singulière* qu'on obtient en éliminant λ entre les deux équations

$$U = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial \lambda} = 0;$$

c'est cette intégrale qui donne la véritable solution du problème proposé.

les valeurs de x, y, z, p, q le long de C. L'équation $s = 0$ admet l'intégrale intermédiaire

$$p = X(x),$$

$X(x)$ désignant une fonction arbitraire de x; cette fonction est déterminée par l'équation de condition

$$\varphi_1(\lambda) = X(f_1(\lambda)).$$

X étant ainsi déterminée, on a pour l'intégrale cherchée

$$z = \int X(x)dx + \Pi(y)$$

ou, en posant $x = f_1(\theta)$,

$$z = \int \varphi_1(\theta) f_1'(\theta) d\theta + \Pi(y).$$

La fonction $\Pi(y)$ est déterminée par les conditions initiales, mais, pour plus de symétrie, on peut se servir de la seconde intégrale intermédiaire $q = Y(y)$, et on trouve que l'intégrale cherchée est représentée par le système des trois équations:

$$\left\{\begin{aligned} x &= f_1(\theta), \\ y &= f_2(\tau), \\ z &= \int_0^\theta \varphi_1(\theta) f_1'(\theta) d\theta + \int_0^\tau \varphi_2(\tau) f_2'(\tau) d\tau, \end{aligned}\right.$$

θ et τ désignant deux variables auxiliaires. Pour $\theta = \tau = \lambda$, les variables x, y, z, p, q ont bien les valeurs données.

L'équation

$$\varphi_1(\lambda) = X(f_1(\lambda))$$

ne détermine plus la fonction X lorsque $f_1(\lambda)$ se réduit à une constante x_0; si $\varphi_1(\lambda)$ ne se réduit pas aussi à une constante, le problème est impossible. Mais, si $\varphi_1(\lambda)$ est constant aussi, le problème est indéterminé, conformément à la théorie des caractéristiques.

19. Soit, d'une manière générale,

$$s + ap + bq + cz = 0$$

une équation pour laquelle un des invariants h et k est nul. Si on a, par exemple,

$$h = \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c = 0,$$

l'équation peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y} + az\right) + b\left(\frac{\partial z}{\partial y} + az\right) = 0;$$

elle admet l'intégrale intermédiaire

$$\frac{\partial z}{\partial y} + az = Ye^{-\int b\,dx}, \tag{43}$$

Y étant une fonction arbitraire de y. Cette fonction Y est déterminée, si on se donne une courbe C par laquelle doit passer la surface cherchée, ainsi que le plan tangent le long de cette courbe, et l'intégration de l'équation linéaire (43) s'achèvera par des quadratures.

En général, toutes les fois qu'une équation linéaire

$$s + ap + bq + cz = 0 \tag{44}$$

est intégrable par la méthode de Laplace, le problème de déterminer une surface intégrale passant par une courbe *donnée* et tangente à une développable *donnée* le long de cette courbe se ramène *à des quadratures.* Supposons en effet qu'une surface S, satisfaisant à l'équation (44), doive passer par une courbe C, le long de laquelle x, y, z, p, q sont des fonctions connues d'un paramètre λ. Si h n'est pas nul, quand on fait la transformation de Laplace

$$z_1 = \frac{\partial z}{\partial y} + az,$$

à la courbe C correspond une courbe C_1; comme l'équation proposée peut s'écrire

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} + bz_1 = hz,$$

on connaîtra la valeur de $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ le long de la courbe C_1, et on aura ensuite $\frac{\partial z_1}{\partial y}$ au moyen de la relation

$$dz_1 = \frac{\partial z_1}{\partial x}dx + \frac{\partial z_1}{\partial y}dy.$$

On sera donc ramené à chercher une intégrale S_1 de la nouvelle équation passant par la courbe C_1 et ayant un plan tangent connu le long de cette courbe. Si la série de LAPLACE se termine dans un sens, on n'aura donc en définitive que des quadratures à effectuer.

20. L'équation

$$s = f(t, x, y, z, p, q) \tag{45}$$

représente, quand on regarde r, s, t comme des coordonnées courantes, un cylindre ayant ses génératrices parallèles à la droite $r = 0$, $s = 0$. Pour que la droite

$$\lambda + \mu r + \nu s = 0,$$

$$\rho + \mu s + \nu t = 0$$

soit une génératrice de cette surface, il faut que l'on ait

$$\mu = 0, \qquad \frac{\lambda}{\nu} + f\left(-\frac{\rho}{\nu}, x, y, z, p, q\right) = 0.$$

Donc toute intégrale intermédiaire V de l'équation (45) doit satisfaire aux deux équations

$$\frac{\partial V}{\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial q} f\left| -\frac{\dfrac{\partial V}{\partial y} + q\dfrac{\partial V}{\partial z}}{\dfrac{\partial V}{\partial q}}, x, y, z, p, q \right| = 0.$$

La première de ces deux relations montre que V ne doit par contenir p; on voit ensuite, en tenant compte de la seconde, que $f(t, x, y, z, p, q)$ doit être une fonction linéaire de p

$$f(t, x, y, z, p, q) = \varphi(x, y, z, q, t) + p\psi(x, y, z, q, t),$$

et la fonction $V(x, y, z, q)$ doit satisfaire aux deux équations

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial q}\varphi\left(x, y, z, q, -\frac{\dfrac{\partial V}{\partial y} + q\dfrac{\partial V}{\partial z}}{\dfrac{\partial V}{\partial q}} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial q}\psi\left(x, y, z, q, -\frac{\dfrac{\partial V}{\partial y} + q\dfrac{\partial V}{\partial z}}{\dfrac{\partial V}{\partial q}} \right) = 0.$$

De l'équation $V(x, y, z, q) = 0$ imaginons qu'on ait tiré $q = \lambda(x, y, z)$; la fonction λ doit satisfaire aux deux relations

$$(46) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial x} - \varphi\left(x, y, z, \lambda, \dfrac{\partial\lambda}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial\lambda}{\partial z}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial z} - \psi\left(x, y, z, \lambda, \dfrac{\partial\lambda}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial\lambda}{\partial z}\right) = 0. \end{cases}$$

Pour qu'il existe une intégrale intermédiaire dépendant d'une fonction arbitraire, les deux équations (46) doivent former un système en involution. C'est ce qui a lieu dans les deux cas particuliers suivants:

$$1^\circ \qquad \psi = 0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0;$$

$$2^\circ \qquad \varphi = 0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0.$$

Dans le premier cas, l'équation proposée est de la forme

$$s - \varphi(x, y, q, t) = 0;$$

elle admet toutes les intégrales de l'équation du premier ordre $q = \lambda(x, y)$, pourvu que λ vérifie la relation

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x} - \varphi\left(x, y, \lambda, \frac{\partial\lambda}{\partial y}\right) = 0.$$

Dans le second cas, l'équation est de la forme [1]

$$s - p\psi(y, z, q, t) = 0;$$

elle admet toutes les intégrales de l'equation du premier ordre $q = \lambda(y, z)$, λ étant déterminé par l'équation

$$\frac{\partial\lambda}{\partial z} - \psi\left(y, z, \lambda, \frac{\partial\lambda}{\partial y} + \lambda\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right) = 0.$$

---

[1] Dans une note récente (Comptes rendus, t. 118, p. 1188), M. Beudon a été conduit à la même méthode pour intégrer les équations $s - p\psi(y, z, q, t) = 0$, par la considération des groupes infinis de transformations. Les équations $s - e^{\lambda z}\varphi(t, q, y) = 0$, étudiées aussi par M. Beudon, se ramènent à la forme précédente en prenant pour nouvelle inconnue $u = \dfrac{\partial z}{\partial y}$. Cette transformation s'applique à toutes les équations qui ne contiennent ni p, ni r, et à celles qui ne contiennent ni z, ni r.

21. Il convient, pour terminer ces généralités sur les intégrales intermédiaires, de faire encore les remarques suivantes.

Lorsqu'une équation du second ordre ne représente pas une surface réglée (Σ) ayant le cône (T) pour cône des directions asymptotiques, elle ne peut admettre d'intégrale intermédiaire dépendant de *deux* constantes arbitraires (n° 16). Mais elle peut admettre des intégrales intermédiaires dépendant d'*une* constante arbitraire. Par exemple, l'équation $r^2 - st = 0$ admet l'intégrale intermédiaire $p - a = 0$. On les obtiendra toujours par l'application de la méthode générale.

Si une équation du second ordre admet une intégrale intermédiaire, ne dépendant d'aucune constante arbitraire, $V = 0$, les équations homogènes en $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}, \frac{\partial V}{\partial p}, \frac{\partial V}{\partial q}$, auxquelles doit satisfaire la fonction V, ne doivent être vérifiées qu'en tenant compte de la relation $V = 0$. Pour lever la difficulté, on peut imaginer qu'on ait tiré de cette équation une des variables en fonction des autres, par exemple $q = \lambda(x, y, z, p)$. Les équations en V donnent des équations pour déterminer la fonction inconnue λ.

IV.

22. Nous allons maintenant étudier en particulier les équations (E) du second ordre jouissant des propriétés suivantes: Considérée comme une équation en r, s, t, l'équation (E) représente une surface réglée (Σ) ayant ses génératrices parallèles à celles du cône (T); de plus, les deux équations homogènes en $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}, \frac{\partial V}{\partial p}, \frac{\partial V}{\partial q}$, auxquelles doit satisfaire toute intégrale intermédiaire V, forment un système en involution.

Soient

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \tag{47}$$

l'équation considérée et

$$(48)\quad \begin{cases} H(x, y, z, p, q; dx, dy, dp, dq) = 0, \\ H_1(x, y, z, p, q; dx, dy, dp, dq) = 0 \end{cases}$$

les équations définissant les multiplicités caractéristiques M_1. On peut toujours supposer, sans restreindre la généralité, que les équations (48) peuvent être résolues par rapport à dp et dq. En effet, s'il n'en est pas ainsi, on peut éliminer dp et dq entre ces deux équations, et on obtient une relation

$$G(x, y, z, p, q, dx, dy) = 0,$$

d'où on tirera soit dx, soit dy. Supposons qu'on en tire dx, par exemple; les équations (48) pourront être remplacées par deux équations de la forme suivante

$$K(x, y, z, p, q; dp, dq, dy) = 0,$$

$$dx + P(x, y, z, p, q)dy = 0.$$

De la première équation on tirera soit dq, soit dy, à moins que cette équation ne se réduise à $dp = 0$. S'il en est ainsi, on tirera alors dy de la seconde, à moins que P ne soit nul. Donc, en laissant de côté l'équation $s = 0$ dont nous n'avons pas à nous occuper, les équations (48) peuvent toujours être résolues par rapport à l'un des couples de différentielles ci-dessous

$$(dp, dq), \ (dp, dy), \ (dq, dx), \ (dx, dy).$$

On ramène les trois derniers cas au premier par l'une des transformations de contact, dues à Ampère et à Legendre,

$$\begin{array}{lllll} x = X, & y = Q, & p = P, & q = -Y, & z = -QY + Z, \\ x = -P, & y = Y, & p = X, & q = Q, & z = -PX + Z, \\ x = P, & y = Q, & p = X, & q = Y, & z = PX + QY - Z. \end{array}$$

Les équations différentielles des caractéristiques étant résolues par rapport à dp et dq, il en résulte que les équations auxquelles doit satisfaire l'intégrale intermédiaire V seront résolues par rapport à $\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z}$, $\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}$. Elles pourront donc s'écrire

$$(49)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} + p\dfrac{\partial V}{\partial z} = f\left(x, y, z, p, q; \dfrac{\partial V}{\partial p}, \dfrac{\partial V}{\partial q}\right), \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} + q\dfrac{\partial V}{\partial z} = \varphi\left(x, y, z, p, q; \dfrac{\partial V}{\partial p}, \dfrac{\partial V}{\partial q}\right), \end{cases}$$

f et φ étant des fonctions homogènes et du premier degré de $\dfrac{\partial V}{\partial p}, \dfrac{\partial V}{\partial q}$.

Prenons d'abord le cas où les fonctions f et φ sont linéaires en $\dfrac{\partial V}{\partial p}, \dfrac{\partial V}{\partial q}$; les équations (49) ont la forme

$$(50)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} + p\dfrac{\partial V}{\partial z} - A\dfrac{\partial V}{\partial p} - B\dfrac{\partial V}{\partial q} = 0, \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} + q\dfrac{\partial V}{\partial z} - C\dfrac{\partial V}{\partial p} - D\dfrac{\partial V}{\partial q} = 0, \end{cases}$$

A, B, C, D étant des fonctions de x, y, z, p, q, et l'équation du second ordre correspondante est

$$rt - s^2 + At + Dr - (B + C)s - BC + AD = 0.$$

En appliquant la méthode générale, on trouve que toute intégrale commune aux deux équations (50) doit vérifier la nouvelle équation

$$(C - B)\frac{\partial V}{\partial z} + \left|\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial C}{\partial x} + q\frac{\partial A}{\partial z} - p\frac{\partial C}{\partial z} + A\frac{\partial C}{\partial p} - C\frac{\partial A}{\partial p} + B\frac{\partial C}{\partial q} - D\frac{\partial A}{\partial q}\right|\frac{\partial V}{\partial p}$$
$$+ \left|\frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial D}{\partial x} + q\frac{\partial B}{\partial z} - p\frac{\partial D}{\partial z} + A\frac{\partial D}{\partial p} - C\frac{\partial B}{\partial p} + B\frac{\partial D}{\partial q} - D\frac{\partial B}{\partial q}\right|\frac{\partial V}{\partial q} = 0,$$

qui doit se réduire à une identité si le système (50) est en involution. On trouve en particulier la condition $B = C$, ce qui montre que les équations (50) ne forment un système en involution que si les deux systèmes de caractéristiques de l'équation du second ordre sont confondus.

Supposons remplies les conditions précédentes. Les équations (50) ont trois intégrales communes distinctes u, v, w; en tenant compte de la relation $B = C$, on vérifie sans peine que l'on a

$$[u, v] = 0, \qquad [u, w] = 0, \qquad [v, w] = 0,$$

le crochet $[u, v]$ ayant le sens habituel

$$[u, v] = \frac{\partial u}{\partial p}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z}\right) - \frac{\partial v}{\partial p}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial u}{\partial q}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z}\right) - \frac{\partial v}{\partial q}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

L'équation du second ordre admet l'intégrale intermédiaire

$$w = F(u\,,\,v),$$

dépendant d'une fonction arbitraire $F(u\,,v)$ de deux variables indépendantes. Cette équation du premier ordre peut toujours être intégrée, malgré la présence d'une fonction arbitraire. En effet les trois équations

$$\begin{cases} w = F(a\,,\,b), \\ u = a, \\ v = b, \end{cases}$$

où $a\,,b$ sont deux constantes arbitraires, définit toujours une multiplicité M_2, d'après les relations $[u\,,\,v] = [u\,,\,w] = [v\,,\,w] = 0$, et il est clair que tous les éléments de cette multiplicité vérifient bien la relation $w = F(u\,,\,v)$. Si donc on élimine p et q entre les trois relations précédentes, on obtient une intégrale complète

$$\Phi(x\,,\,y\,,\,z\,,\,a\,,\,b\,,\,F(a\,,\,b)) = 0$$

de l'équation $w = F(u\,,\,v)$. L'intégrale générale sera représentée par le système des deux équations

$$\Phi(x\,,\,y\,,\,z\,,\,a\,,\,\varphi(a)\,,\,F(a\,,\,\varphi(a))) = 0,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a} + \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\varphi'(a) + \frac{\partial\Phi}{\partial F}\left|\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial\varphi}\varphi'(a)\right| = 0,$$

où $\varphi(a)$ est une fonction arbitraire de a. Remarquons que $F(a\,,\varphi(a))$ est aussi une fonction arbitraire de a, $\psi(a)$; par conséquent l'intégrale générale de l'équation du second ordre est donnée par le système des deux équations

$$\Phi(x\,,\,y\,,\,z\,,\,a\,,\,\varphi(a)\,,\,\psi(a)) = 0,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a} + \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi(a)}\varphi'(a) + \frac{\partial\Phi}{\partial\psi(a)}\psi'(a) = 0.$$

Ce sont ces propriétés, bien connues, que nous allons étendre aux équations les plus générales pour lesquelles le système (49) est en involution.

23. Pour plus de symétrie dans les notations, posons dans les équations (49),

$$x = x_1, \qquad y = x_2, \qquad z = x_3, \qquad p = x_4, \qquad q = x_5,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = p_1, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = p_2, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = p_3, \qquad \frac{\partial V}{\partial p} = p_4, \qquad \frac{\partial V}{\partial q} = p_5;$$

elles deviennent

$$(51) \qquad \begin{cases} H = p_1 + x_4 p_3 - f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5; p_4, p_5) = 0, \\ H_1 = p_2 + x_5 p_3 - \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5; p_4, p_5) = 0. \end{cases}$$

On sait que toute intégrale commune aux deux équations (51) satisfait aussi à l'équation

$$(H, H_1) = \sum_{i=1}^{5} \frac{D(H, H_1)}{D(p_i, x_i)} = 0;$$

en développant les calculs, on trouve cette équation

$$(H, H_1) = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} - x_4 \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} + x_5 \frac{\partial f}{\partial x_3} + \frac{\partial f}{\partial p_4}\frac{\partial\varphi}{\partial x_4} - \frac{\partial f}{\partial x_4}\frac{\partial\varphi}{\partial p_4}$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial p_5}\frac{\partial\varphi}{\partial x_5} - \frac{\partial f}{\partial x_5}\frac{\partial\varphi}{\partial p_5} + p_3\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_4} - \frac{\partial f}{\partial p_5}\right) = 0.$$

Si le système (51) est en involution, cette équation doit être une conséquence des deux premières, et, comme elle ne renferme ni p_1, ni p_2, elle doit se réduire à une identité. D'ailleurs elle est linéaire en p_3; les fonctions f et φ doivent donc satisfaire aux deux relations

$$(52) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial p_4} = \frac{\partial f}{\partial p_5},$$

$$(53) \qquad \frac{D(f, \varphi)}{D(p_4, x_4)} + \frac{D(f, \varphi)}{D(p_5, x_5)} + \frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + x_5 \frac{\partial f}{\partial x_3} - x_4 \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} = 0.$$

La première équation montre que f et φ sont les dérivées partielles d'une fonction de $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, p_4, p_5$ par rapport à p_4 et à p_5 respectivement; et, comme f et φ sont homogènes et du premier degré en p_4, p_5, la fonction dont elles sont les dérivées partielles doit être homogène et du second degré et peut s'écrire

$$p_4^2 \psi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5; u),$$

en posant $u = \frac{p_5}{p_4}$. On aura donc

$$f = 2p_4\psi - p_5 \frac{\partial \psi}{\partial u}, \qquad \varphi = p_4 \frac{\partial \psi}{\partial u},$$

et, en portant ces valeurs de f et de φ dans l'équation (53), elle devient

$$(54) \quad \left\{ \begin{aligned} &\left\{ 2u\frac{\partial \psi}{\partial x_4} - 2\frac{\partial \psi}{\partial x_5} \right\} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial x_1} - u\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial x_1} - (ux_5 + x_4)\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial x_3} \\ &+ \left\{ 2\psi - u\frac{\partial \psi}{\partial u} \right\} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial x_4} + \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial u} + u\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \right\} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial x_5} - 2\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial x_4} \\ &+ 2\frac{\partial \psi}{\partial x_2} + 2x_5\frac{\partial \psi}{\partial x_3} = 0. \end{aligned} \right.$$

Cherchons quelle sera la forme de l'équation du second ordre correspondante. Les équations (49) sont, dans le cas considéré ici,

$$\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial p} \left| 2\psi\left(\frac{\frac{\partial V}{\partial q}}{\frac{\partial V}{\partial p}}\right) - \frac{\frac{\partial V}{\partial q}}{\frac{\partial V}{\partial p}} \psi'_u\left(\frac{\frac{\partial V}{\partial q}}{\frac{\partial V}{\partial p}}\right) \right|,$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial p}\psi'_u\left(\frac{\frac{\partial V}{\partial q}}{\frac{\partial V}{\partial p}}\right),$$

où

$$u = \frac{\frac{\partial V}{\partial q}}{\frac{\partial V}{\partial p}};$$

pour remonter à l'équation du second ordre, remplaçons $\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z}$, $\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}$, $\frac{\partial V}{\partial p}$, $\frac{\partial V}{\partial q}$ par λ, ρ, μ, ν respectivement, nous trouvons les deux relations

$$\lambda = 2\mu\psi\left(\frac{\nu}{\mu}\right) - \nu\psi'\left(\frac{\nu}{\mu}\right),$$

$$\rho = \mu\psi'\left(\frac{\nu}{\mu}\right)$$

qui expriment les conditions nécessaires et suffisantes (n° 16) pour que la droite

$$\lambda + \mu r + \nu s = 0,$$

$$\rho + \mu s + \nu t = 0,$$

où on considère r, s, t, comme des coordonnées courantes, soit une génératrice de la surface réglée (Σ) représentée par l'équation cherchée. Les équations de cette génératrice peuvent donc s'écrire, en prenant $\mu = 1$, $\nu = m$,

$$r + ms + 2\psi(m) - m\psi'(m) = 0,$$

$$s + tm + \psi'(m) = 0;$$

cette droite est la caractéristique du plan mobile

$$r + 2sm + tm^2 + 2\psi(m) = 0,$$

où m désigne le paramètre variable. La surface (Σ) est donc une surface développable, et, par conséquent, les deux systèmes de caractéristiques sont confondus, comme dans le cas de l'équation linéaire. En résumé, on obtient comme il suit toutes les équations du second ordre pour lesquelles les équations, qui déterminent les intégrales intermédiaires du premier ordre, forment un système en involution; *on prend l'enveloppe du plan mobile*

$$r + 2sm + tm^2 + 2\psi(x, y, z, p, q; m) = 0,$$

x, y, z, p, q étant regardées comme des constantes, r, s, t comme des coordonnées courantes, et m comme le paramètre variable. La fonction ψ doit en outre satisfaire à l'équation (54), *où on aurait remplacé $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, u$ par x, y, z, p, q, m respectivement.*

24. Nous allons montrer maintenant que l'intégration des équations de cette espèce se ramène à l'intégration du système en involution (49). Soit $V(x, y; z, p, q, a, b)$ une intégrale de ce système avec deux constantes arbitraires a et b. En différentiant les équations (49) par rapport à a et à b respectivement, il vient

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial x} + p\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial z} = \frac{\partial f}{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)}\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial p} + \frac{\partial f}{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)}\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial q},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial y} + q\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)}\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)}\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial q},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b\,\partial x} + p\frac{\partial^2 V}{\partial b\,\partial z} = \frac{\partial f}{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)}\frac{\partial^2 V}{\partial b\,\partial p} + \frac{\partial f}{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)}\frac{\partial^2 V}{\partial b\,\partial q},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b\,\partial y} + q\frac{\partial^2 V}{\partial b\,\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)}\frac{\partial^2 V}{\partial b\,\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)}\frac{\partial^2 V}{\partial b\,\partial q}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\left[V, \frac{\partial V}{\partial a}\right] = {} & \frac{\partial V}{\partial p}\left|\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial x} + p\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial z}\right| + \frac{\partial V}{\partial q}\left|\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial y} + q\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial z}\right| \\ & - \frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial p}\left|\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z}\right| - \frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial q}\left|\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}\right| \\ = {} & \frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial p}\left|\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)}\frac{\partial V}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)}\frac{\partial V}{\partial q} - \left(\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z}\right)\right| \\ & + \frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial q}\left|\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)}\frac{\partial V}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)}\frac{\partial V}{\partial q} - \left(\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}\right)\right|;\end{aligned}$$

en tenant compte de la condition (49), on peut encore écrire

$$\begin{aligned}\left[V, \frac{\partial V}{\partial a}\right] = {} & \frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial p}\left|\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)}\frac{\partial V}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)}\frac{\partial V}{\partial q} - f\right| \\ & + \frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial q}\left|\frac{\partial \varphi}{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)}\frac{\partial V}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial q}\right)}\frac{\partial V}{\partial q} - \varphi\right|,\end{aligned}$$

et, comme f et φ sont des fonctions homogènes et du premier degré de $\frac{\partial V}{\partial p}$ et de $\frac{\partial V}{\partial q}$, il vient

$$\left[V, \frac{\partial V}{\partial a}\right] = 0.$$

On verrait tout pareillement que l'on a $\left[V, \frac{\partial V}{\partial b}\right] = 0$. Calculons maintenant $\left[\frac{\partial V}{\partial a}, \frac{\partial V}{\partial b}\right]$; on a

$$\left[\frac{\partial V}{\partial a}, \frac{\partial V}{\partial b}\right] = \frac{\partial^2 V}{\partial a \partial p}\left|\frac{\partial^2 V}{\partial b \partial x} + p\frac{\partial^2 V}{\partial b \partial z}\right| + \frac{\partial^2 V}{\partial a \partial q}\left|\frac{\partial^2 V}{\partial b \partial y} + q\frac{\partial^2 V}{\partial b \partial z}\right|$$
$$- \frac{\partial^2 V}{\partial b \partial p}\left|\frac{\partial^2 V}{\partial a \partial x} + p\frac{\partial^2 V}{\partial a \partial z}\right| - \frac{\partial^2 V}{\partial b \partial q}\left|\frac{\partial^2 V}{\partial a \partial y} + q\frac{\partial^2 V}{\partial a \partial z}\right|.$$

En remplaçant $\frac{\partial^2 V}{\partial a \partial x} + p\frac{\partial^2 V}{\partial a \partial z}, \ldots$ par leurs expressions, il reste

$$\left[\frac{\partial V}{\partial a}, \frac{\partial V}{\partial b}\right] = 0.$$

On obtiendra donc une intégrale complète de l'intégrale intermédiaire

$$V(x, y, z, p, q, a, b) = 0$$

en adjoignant à cette équation les deux relations

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \alpha, \qquad \frac{\partial V}{\partial b} = \beta,$$

α et β désignant deux nouvelles constantes arbitraires. Ceci suppose que $V, \frac{\partial V}{\partial a}, \frac{\partial V}{\partial b}$ sont des fonctions distinctes de x, y, z, p, q; mais on peut toujours choisir une intégrale complète du système (49) satisfaisant à cette condition car, le système (49) étant en involution, on peut choisir arbitrairement la fonction de z, p, q, a, b à laquelle se réduit V pour $x = x_0$, $y = y_0$.

Si on élimine a et b entre les relations

$$V(x, y, z, p, q, a, b) = 0, \qquad b = \pi(a), \qquad \frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b}\pi'(a) = 0,$$

où $\pi(a)$ est une fonction quelconque de a, on obtient (n° 17) une nouvelle intégrale intermédiaire $V_1 = 0$, qui s'intègre aussi sans aucune difficulté.

En effet, prenons pour b une fonction $\psi(a, a', b')$, dépendant de deux nouvelles constantes a' et b', et se réduisant à $\pi(a)$ pour $a' = a'_0$, $b' = b'_0$. La nouvelle intégrale complète dépend de deux constantes arbitraires a' et b', et on peut lui appliquer la même méthode qu'à la première. L'intégration d'une équation du second ordre de l'espèce considérée est donc ramenée à l'intégration du système en involution (49).

25. Si on a intégré le système en involution (49), on peut obtenir sous forme finie l'intégrale générale de l'équation du second ordre correspondante. Considérons toujours les trois équations

$$V = 0, \qquad b = \pi(a), \qquad \frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b}\pi'(a) = 0;$$

imaginons que des deux dernières on tire les valeurs de a et b en fonction de x, y, z, p, q et qu'on porte ces valeurs de a et de b dans $V, \frac{\partial V}{\partial a}, \frac{\partial V}{\partial b}$, on obtient ainsi trois fonctions V_1, V_2, V_3 qui sont encore en involution, quelle que soit la fonction $\pi(a)$. Désignons par u une quelconque des variables x, y, z, p, q; on a

$$\frac{\partial V_1}{\partial u} = \frac{\partial V}{\partial u} + \left[\frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b}\pi'(a)\right]\frac{\partial a}{\partial u} = \frac{\partial V}{\partial u},$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial u} = \frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial u} + \left[\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial b}\pi'(a)\right]\frac{\partial a}{\partial u}.$$

D'autre part, de l'équation qui donne a, on tire

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial u} + \frac{\partial^2 V}{\partial b\,\partial u}\pi'(a) + \left|\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} + 2\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial b}\pi'(a) + \frac{\partial^2 V}{\partial b^2}\pi'^2(a) + \frac{\partial V}{\partial b}\pi''(a)\right|\frac{\partial a}{\partial u} = 0,$$

de sorte qu'en remplaçant $\frac{\partial a}{\partial u}$ par sa valeur, on a des formules de la forme

$$\frac{\partial V_2}{\partial u} = \lambda\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial u} + \mu\frac{\partial^2 V}{\partial b\,\partial u},$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial u} = \lambda'\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial u} + \mu'\frac{\partial^2 V}{\partial b\,\partial u},$$

$\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ étant les mêmes, quelle que soit la variable u. Les crochets

$[V_1, V_2], [V_1, V_3], [V_2, V_3]$ sont donc des combinaisons linéaires et homogènes des crochets $\left[V, \frac{\partial V}{\partial a}\right], \left[V, \frac{\partial V}{\partial b}\right], \left[\frac{\partial V}{\partial a}, \frac{\partial V}{\partial b}\right]$ et par suite on a aussi

$$[V_1, V_2] = 0, \qquad [V_1, V_3] = 0, \qquad [V_2, V_3] = 0.$$

Il suit de là que les trois équations

$$V_1 = 0, \qquad V_2 = \alpha, \qquad V_3 = \beta,$$

où α et β sont deux constantes arbitraires, représentent une intégrale complète de l'équation $V_1 = 0$. Cette intégrale complète s'obtiendra par l'élimination de p et q entre les trois équations, ou encore, d'après la signification de V_1, V_2, V_3, par l'élimination de p, q, a, b entre les cinq relations

$$V = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b}\pi'(a) = 0, \qquad b = \pi(a), \qquad \frac{\partial V}{\partial a} = \alpha, \qquad \frac{\partial V}{\partial b} = \beta.$$

Si on élimine d'abord p et q entre les trois équations $V = 0$, $\frac{\partial V}{\partial a} = \alpha$. $\frac{\partial V}{\partial b} = \beta$, il reste les trois équations

$$H(x, y, z, a, b, \alpha, \beta) = 0,$$
$$\alpha + \pi'(a)\beta = 0,$$
$$b = \pi(a),$$

entre lesquelles il restera à éliminer a et b. Mais on peut substituer à l'une des constantes α, β, à α par exemple, la constante a définie par l'équation $\alpha + \pi'(a)\beta = 0$, ce qui revient à éliminer b et α au lieu de a et b. Cette élimination se fait d'elle-même, et on est conduit à l'intégrale complète

$$H(x, y, z, a, \pi(a), -\beta\pi'(a), \beta) = 0$$

avec deux constantes arbitraires a et β. Si on remplace ensuite β par une fonction arbitraire de a, $\chi(a)$, on a l'intégrale générale de l'équation du second ordre proposée qui est représentée par le système de deux équations de la forme suivante

$$(55) \qquad \begin{cases} \Phi(x, y, z, a, \pi(a), \pi'(a), \chi(a)) = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial a} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \pi(a)}\pi'(a) + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \pi'(a)}\pi''(a) + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \chi(a)}\chi'(a) = 0, \end{cases}$$

$\pi(a)$ et $\chi(a)$ étant deux fonctions arbitraires. On peut donc énoncer le théorème suivant.

Lorsque le système (49) *est en involution, soit* $V(x, y, z, p, q, a, b)$ *une intégrale de ce système avec deux constantes arbitraires* a *et* b, *telle que* $V, \frac{\partial V}{\partial a}, \frac{\partial V}{\partial b}$ *soient des fonctions distinctes de* z, p, q; *l'intégrale générale de l'équation du second ordre est représentée par les deux relations* (55), *dont la première s'obtient en éliminant* p *et* q *entre les trois équations*

$$V = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial a} = \alpha, \qquad \frac{\partial V}{\partial b} = \beta,$$

et remplaçant b *par* $\pi(a)$, β *par* $\chi(a)$, *et* α *par* $-\pi'(a)\chi(a)$.

26. L'équation (54) est du second ordre et la fonction inconnue ϕ dépend de 6 variables. Il paraît difficile d'obtenir l'intégrale générale de cette équation, mais on obtient une solution évidente en prenant pour ϕ une fonction indépendante de x, y, z, p, q, dépendant du paramètre m seulement. L'équation du second ordre correspondante, ne renferme que r, s, t et s'obtient en cherchant l'enveloppe du plan mobile qui a pour équation

$$r + 2sm + tm^2 + 2\phi(m) = 0,$$

$\phi(m)$ ne contenant aucune des lettres x, y, z, p, q. Nous chercherons une intégrale intermédiaire de la forme

$$V(z + ax + by, p + a, q + b) = 0,$$

a et b étant des constantes arbitraires. Si on résout cette équation par rapport à $p + a$, on en tire

$$p + a + \omega(z + ax + by, q + b) = 0, \tag{56}$$

et on a

$$\frac{\frac{\partial V}{\partial q}}{\frac{\partial V}{\partial p}} = \frac{\partial \omega}{\partial v}, \qquad \frac{\frac{\partial V}{\partial x}}{\frac{\partial V}{\partial p}} = \frac{\partial \omega}{\partial u} a, \qquad \frac{\frac{\partial V}{\partial y}}{\frac{\partial V}{\partial z}} = \frac{\partial \omega}{\partial u} b, \qquad \frac{\frac{\partial V}{\partial z}}{\frac{\partial V}{\partial p}} = \frac{\partial \omega}{\partial u},$$

en posant $u = z + ax + by$, $v = q + b$. Les équations (49) deviennent

$$(57)\qquad \begin{cases} -\omega\dfrac{\partial\omega}{\partial u} = 2\psi\left(\dfrac{\partial\omega}{\partial v}\right) - \dfrac{\partial\omega}{\partial v}\psi'\left(\dfrac{\partial\omega}{\partial v}\right), \\ v\dfrac{\partial\omega}{\partial u} = \psi'\left(\dfrac{\partial\omega}{\partial v}\right); \end{cases}$$

posons, dans ces équations, $\dfrac{\partial\omega}{\partial u} = \alpha$, $\dfrac{\partial\omega}{\partial v} = \beta$, on en tire

$$v = \frac{\psi'(\beta)}{\alpha}, \qquad \omega = \frac{\beta\psi'(\beta) - 2\psi(\beta)}{\alpha},$$

et en portant ces valeurs dans la relation

$$d\omega = \frac{\partial\omega}{\partial u}du + \frac{\partial\omega}{\partial v}dv,$$

il vient

$$\frac{2\psi(\beta)d\alpha - \alpha\psi'(\beta)d\beta}{\alpha^3} = du,$$

et, par suite,

$$u + \frac{\psi(\beta)}{\alpha^2} = \text{const.}$$

On obtiendra donc une intégrale intermédiaire de la forme (56) en éliminant α et β entre les trois relations

$$(58)\qquad \begin{cases} z + ax + by + \dfrac{\psi(\beta)}{\alpha^2} = 0, \\ q + b = \dfrac{\psi'(\beta)}{\alpha}, \\ p + a = \dfrac{2\psi(\beta) - \beta\psi'(\beta)}{\alpha}. \end{cases}$$

Imaginons que des deux dernières on tire α et β; en les combinant par division on aura d'abord pour β une fonction de $\dfrac{p+a}{q+b}$, puis pour $\dfrac{1}{\alpha}$ une fonction homogène du premier degré de $p + a$ et de $q + b$. En

portant ces valeurs dans la première, on trouvera donc une intégrale intermédiaire de la forme

$$V = z + ax + by + G(p + a\,,\, q + b) = 0,$$

G étant une fonction homogène et du second degré de $p + a$ et de $q + b$; il est facile de vérifier qu'on a bien, quelle que soit la fonction G,

$$\left[V, \frac{\partial V}{\partial a}\right] = 0, \qquad \left[V, \frac{\partial V}{\partial b}\right] = 0, \qquad \left[\frac{\partial V}{\partial a}, \frac{\partial V}{\partial b}\right] = 0.$$

L'élimination précédente n'est possible que si la fonction ψ est donnée. On peut cependant appliquer la méthode générale du n° 25 sans particulariser cette fonction. Pour la commodité des calculs, changeons α en $\frac{1}{\alpha}$ et posons

$$V = z + ax + by + \alpha^2\psi(\beta),$$

α et β étant déterminés par les deux équations

$$\alpha\psi'(\beta) = q + b,$$

$$\alpha\{2\psi(\beta) - \beta\psi'(\beta)\} = p + a.$$

On a

$$\frac{\partial V}{\partial a} = x + 2\alpha\psi(\beta)\frac{d\alpha}{da} + \alpha^2\psi'(\beta)\frac{d\beta}{da},$$

$$\frac{\partial V}{\partial b} = y + 2\alpha\psi(\beta)\frac{d\alpha}{db} + \alpha^2\psi'(\beta)\frac{d\beta}{db};$$

les valeurs des dérivées partielles $\frac{d\alpha}{da}, \frac{d\alpha}{db}, \frac{d\beta}{da}, \frac{d\beta}{db}$ se tirent des deux dernières équations et il reste, toutes réductions faites,

$$\frac{\partial V}{\partial a} = x + \alpha, \qquad \frac{\partial V}{\partial b} = y + \alpha\beta.$$

Pour appliquer la méthode générale, nous devons éliminer α et β entre les trois équations

$$V = z + ax + by + \alpha^2\psi(\beta) = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial a} = x + \alpha = a', \qquad \frac{\partial V}{\partial b} = y + \alpha\beta = b',$$

et remplacer ensuite b par $\pi(a)$, b' par $\chi(a)$ et a' par $-\pi'(a)\chi(a)$. Nous sommes conduits ainsi à l'équation

$$\begin{aligned}&\Phi(x, y, z, a, \pi(a), \pi'(a), \chi(a))\\ &= z + ax + y\pi(a) + \{x + \pi'(a)\chi(a)\}^2 \psi\left\{\frac{y - \chi(a)}{x + \pi'(a)\chi(a)}\right\}\end{aligned}$$

et l'intégrale générale de l'équation du second ordre proposée est représentée par l'ensemble des deux équations

$$(59)\qquad \begin{cases} \Phi(x, y, z, \pi(a), \pi'(a), \chi(a)) = 0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial a} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial\pi(a)}\pi'(a) + \dfrac{\partial\Phi}{\partial\pi'(a)}\pi''(a) + \dfrac{\partial\Phi}{\partial\chi(a)}\chi'(a) = 0, \end{cases}$$

$\pi(a)$ et $\chi(a)$ étant des fonctions arbitraires du paramètre a.

Remarque. Les équations précédentes paraissent au premier abord très particulières, mais il convient de remarquer qu'on a une catégorie beaucoup plus étendue d'équations s'intégrant complètement par notre méthode en considérant les équations du second ordre qui peuvent se ramener à la forme précédente par une transformation de contact. Elles possèdent une intégrale intermédiaire de la forme

$$Z + aX + bY + G(P + a, Q + b) = 0,$$

G étant une fonction homogène du second degré, et X, Y, Z, P, Q cinq fonctions de x, y, z, p, q donnant lieu à l'identité

$$dZ - PdX - QdY = \rho(dz - pdx - qdy).$$

27. Etant donnée une fonction absolument arbitraire

$$\Phi(x, y, z, a, \pi(a), \pi'(a), \chi(a)),$$

les surfaces enveloppes représentées par l'ensemble des deux équations (59)

$$\begin{cases} \Phi(x, y, z, a, \pi(a), \pi'(a), \chi(a)) = 0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial a} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial\pi(a)}\pi'(a) + \dfrac{\partial\Phi}{\partial\pi'(a)}\pi''(a) + \dfrac{\partial\Phi}{\partial\chi(a)}\chi'(a) = 0, \end{cases}$$

où $\pi(a)$ et $\chi(a)$ sont des fonctions des arbitraires de a, ne sont pas en général des surfaces intégrales d'une même équation aux dérivées partielles du second ordre. En effet, les valeurs de p, q, r, s, t dépendent

de a, $\pi(a)$, $\pi'(a)$, $\pi''(a)$, $\pi'''(a)$, $\chi(a)$, $\chi'(a)$, $\chi''(a)$, et on aurait à éliminer huit paramètres entre sept équations. Pour que l'élimination soit possible, la fonction Φ doit satisfaire à certaines conditions, que nous nous proposons d'obtenir. Imaginons, pour cela, que l'on ait résolu l'équation $\Phi = 0$ par rapport à z et soit

$$z = F(x, y, a, \pi(a), \pi'(a), \chi(a))$$

la valeur de z ainsi obtenue. Les surfaces considérées sont aussi représentées par l'ensemble des deux équations

$$(60)\qquad \begin{cases} z = F(x, y, a, \pi(a), \pi'(a), \chi(a)), \\ 0 = \dfrac{\partial F}{\partial a} + \dfrac{\partial F}{\partial \pi(a)}\pi'(a) + \dfrac{\partial F}{\partial \pi'(a)}\pi''(a) + \dfrac{\partial F}{\partial \chi(a)}\chi'(a). \end{cases}$$

Quand on regarde a, $\pi(a)$, $\pi'(a)$, $\chi(a)$ comme des constantes *données*, la première des équations (60) représente une famille de surfaces S dépendant de *quatre* paramètres. Nous excluons le cas où toutes ces surfaces S seraient des intégrales d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, car les surfaces enveloppes vérifieraient aussi la même équation du premier ordre. Nous pouvons aussi supposer que les quatre paramètres dont dépendent les surfaces S sont essentiellement distincts, et ne peuvent se réduire à trois; on sait en effet (n° 13) que les surfaces enveloppes d'une famille de surfaces à 3 paramètres satisfont à une même équation du second ordre, linéaire en r, s, t, $rt - s^2$, quelles que soient les relations que l'on établit entre ces trois paramètres.

Cela posé, considérons les courbes C représentées par l'ensemble des équations (60), où on regarde a, $\pi(a)$, $\pi'(a)$, $\pi''(a)$, $\chi(a)$, $\chi'(a)$ comme des paramètres. Les surfaces étudiées ici sont évidemment engendrées par des courbes de cette famille associées d'une certaine façon; de plus, les valeurs de p et de q, le long de chacune de ces courbes, ont pour expressions

$$(61)\qquad p = \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial F}{\partial y},$$

et ne dépendent non plus que de a, $\pi(a)$, $\pi'(a)$, $\pi''(a)$, $\chi(a)$, $\chi'(a)$. Nous définissons ainsi un système de multiplicités M_1, et toutes les surfaces enveloppes des surfaces S sont des lieux de multiplicités M_1.

D'ailleurs, par chacune de ces multiplicités, il passe une infinité de surfaces enveloppes, formant un système continu, et n'ayant entre elles qu'un contact du premier ordre. On peut, en effet, prendre pour $\pi(a)$ et $\chi(a)$ des fonctions telles que, pour $a = a_0$, $\pi(a_0)$, $\pi'(a_0)$, $\pi''(a_0)$, $\chi(a_0)$, $\chi'(a_0)$ aient des valeurs données à l'avance et, comme les valeurs des dérivées suivantes $\pi'''(a_0)$, $\chi''(a_0)$, ... restent absolument arbitraires, les surfaces correspondantes auront seulement un contact du premier ordre le long de la multiplicité M_1 correspondante aux valeurs données a_0, $\pi(a_0)$, $\pi'(a_0)$, $\pi''(a_0)$, $\chi(a_0)$, $\chi'(a_0)$. Si on se reporte au n° 10, on peut conclure de là que le problème proposé est équivalent à celui-ci: *Quelles sont les conditions pour que les multiplicités M_1, définies par les relations* (60) *et* (61) *vérifient deux relations distinctes de la forme*

$$H(x, y, z, p, q; dx, dy, dp, dq) = 0, \qquad H_1(x, y, z, p, q; dx, dy, dp, dq) = 0.$$

28. Ecrivons toutes les relations entre $x, y, z, p, q, dx, dy, dp, dq$

$$(62)\quad \left\{\begin{aligned}
z &= F(x, y, a, \pi(a), \pi'(a), \chi(a)),\\
p &= \frac{\partial F}{\partial x},\\
q &= \frac{\partial F}{\partial y},\\
dp &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,dx + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\,dy,\\
dq &= \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\,dx + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,dy,\\
&\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial \pi(a)}\pi'(a) + \frac{\partial F}{\partial \pi'(a)}\pi''(a) + \frac{\partial F}{\partial \chi(a)}\chi'(a) = 0,\\
d\left(\frac{\partial F}{\partial a}\right) &+ d\left(\frac{\partial F}{\partial \pi(a)}\right)\pi'(a) + d\left(\frac{\partial F}{\partial \pi'(a)}\right)\pi''(a) + d\left(\frac{\partial F}{\partial \chi(a)}\right)\chi'(a) = 0,
\end{aligned}\right.$$

en posant, d'une manière générale,

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy.$$

L'élimination de a, $\pi(a)$, $\pi'(a)$, $\pi''(a)$, $\chi(a)$, $\chi'(a)$ entre ces sept équa-

tions doit conduire à deux relations distinctes. Les cinq premières ne renferment que $a, \pi(a), \pi'(a), \chi(a)$; l'élimination de ces quatre paramètres entre ces cinq équations ne peut conduire à deux relations distinctes. D'abord, on peut toujours résoudre les trois premières par rapport à trois des quantités $a, \pi(a), \pi'(a), \chi(a)$; s'il en était autrement, on pourrait éliminer $a, \pi(a), \pi'(a), \chi(a)$ entre ces trois équations, et toutes les surfaces S seraient des intégrales d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, cas que nous avons écarté. Supposons, par exemple, qu'on ait tiré des trois premières équations $a, \pi(a), \pi'(a)$ en fonction de $x, y, z, p, q, \chi(a)$; en portant ces valeurs dans les deux suivantes, on ne pourra obtenir deux relations distinctes entre $x, y, z, p, q, dx, dy, dp, dq$ que si $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ deviennent, après cette substitution, indépendantes de $\chi(a)$. La fonction F devrait donc satisfaire à trois équations de la forme

$$r = \varphi_1(x, y, z, p, q),$$

$$s = \varphi_2(x, y, z, p, q),$$

$$t = \varphi_3(x, y, z, p, q);$$

l'intégrale générale d'un pareil système dépend de *trois* constantes arbitraires, au plus. Les surfaces S ne dépendraient donc, en réalité, que de trois constantes essentiellement distinctes; c'est encore un cas que nous avons écarté.

Les quantités $\pi''(a), \chi'(a)$ ne figurent que dans les deux dernières équations (62). Il faudra donc que l'on puisse déduire de ces deux dernières équations une relation indépendante de $\pi''(a), \chi'(a)$. La question revient à celle-ci. Soit

$$U = \frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial \pi(a)} \pi'(a),$$

$$V = \frac{\partial F}{\partial \pi'(a)}, \qquad W = \frac{\partial F}{\partial \chi(a)};$$

si on considère $a, \pi(a), \pi'(a), \chi'(a)$ comme des constantes données, $\pi''(a)$ et $\chi'(a)$ comme des paramètres variables A et B, l'équation

$$U + AV + BW = 0$$

représente une famille de courbes planes dépendant de deux paramètres A et B. Pour qu'on puisse déduire des deux relations

$$U + AV + BW = 0,$$
$$dU + AdV + BdW = 0,$$

une relation indépendante de A et de B, il faut et il suffit que toutes ces courbes vérifient, quelles que soient les constantes A et B, une même équation différentielle du premier ordre. S'il en est ainsi, les courbes

$$\frac{V}{U} = \text{const.}$$

obtenues en supposant $B = 0$, et les courbes

$$\frac{W}{U} = \text{const.},$$

obtenues en prenant $A = 0$, représentent l'intégrale générale de la même équation; il faut et il suffit pour cela que l'on ait

$$\frac{W}{U} = \varphi\left(\frac{V}{U}\right).$$

Lorsque cette condition est vérifiée, toutes les courbes

$$U + AV + BW = 0$$

satisfont bien à l'équation différentielle du premier ordre

$$d\left(\frac{V}{U}\right) = 0.$$

En revenant à la question proposée, on voit que la fonction F doit satisfaire à une relation de la forme

$$(63) \qquad \frac{\dfrac{\partial F}{\partial a} + \dfrac{\partial F}{\partial \pi(a)}\pi'(a)}{\dfrac{\partial F}{\partial \chi(a)}} = \varphi\left|\frac{\dfrac{\partial F}{\partial \pi'(a)}}{\dfrac{\partial F}{\partial \chi(a)}};\ a,\ \pi(a),\ \pi'(a),\ \chi(a)\right|,$$

où la fonction φ ne dépend ni de x, ni de y. Cette condition est d'ailleurs suffisante. D'une manière plus générale, prenons pour $\Phi(x, y, z, a, \pi(a), \pi'(a), \chi(a))$ une fonction satisfaisant à une relation de la forme (63); de la seconde des relations (55) qui définissent les multiplicités M_1, on tirera

$$\frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial a} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \pi(a)}\pi'(a)}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial \chi(a)}} = K,$$

K dépendant de a, $\pi(a)$, $\pi'(a)$, $\pi''(a)$, $\chi(a)$, $\chi'(a)$ et étant indépendant de x, y, z, de sorte que les multiplicités M_1 ne dépendront en réalité que de *cinq* paramètres, a, $\pi(a)$, $\pi'(a)$, $\chi(a)$, K. Donc, d'après ce qu'on a démontré plus haut (n° 13) toutes les surfaces représentées par l'ensemble des équations (55) satisfont bien à une même équation aux dérivées partielles du second ordre.

Comme vérification, reprenons l'exemple du n° 26, où on a

$$\Phi = z + ax + y\pi(a) + \{x + \pi'(a)\chi(a)\}^2 \psi\left\{\frac{y - \chi(a)}{x + \pi'(a)\chi(a)}\right\};$$

on trouve pour les caractéristiques une équation de la forme

$$y - \chi(a) = K\{x + \pi'(a)\chi(a)\},$$

et, par suite

$$\Phi = z + ax + y\pi(a) + \{x + \pi'(a)\chi(a)\}^2 \psi(K).$$

Les caractéristiques sont donc des paraboles ayant leur axe parallèle à l'axe des z; elles dépendent bien de cinq paramètres seulement.

29. Afin d'avoir des notations plus symétriques, nous poserons

$$a = \xi_1, \qquad \pi(a) = \xi_2, \qquad \pi'(a) = \xi_3, \qquad \chi(a) = \xi_4,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = p_1, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \pi(a)} = p_2, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \pi'(a)} = p_3, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \chi(a)} = p_4;$$

il suffira de prendre pour Φ une fonction de ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, contenant en outre 3 paramètres x, y, z, et satisfaisant à une équation de la forme

$$\Pi\left\{\frac{p_1 + \xi_3 p_2}{p_4}, \frac{p_3}{p_4}; \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\right\} = 0. \tag{64}$$

Imaginons qu'on ait résolu l'équation $\Phi = 0$ par rapport à ξ_4,

$$\xi_4 = V(\xi_1, \xi_2, \xi_3);$$

l'équation (64) est remplacée par la suivante

$$\Pi\left(\frac{\partial V}{\partial \xi_1} + \xi_3 \frac{\partial V}{\partial \xi_2}, \frac{\partial V}{\partial \xi_3}, \xi_1, \xi_2, \xi_3, V\right) = 0. \tag{65}$$

D'après ce qui précède, il suffira de connaître une intégrale complète, avec trois constantes arbitraires x, y, z, d'une équation de la forme (65) pour en déduire une fonction Φ satisfaisant à la condition trouvée et, par suite, une équation aux dérivées partielles du second ordre dont l'intégrale générale est représentée par un système de deux équations de la forme (59).

Etant donnée une équation du premier ordre de la forme (65), il lui correspond une infinité d'intégrales complètes et, par conséquent, une infinité d'équations du second ordre s'intégrant de la façon précédente. Mais toutes ces équations du second ordre peuvent se déduire de l'une d'elles par des transformations de contact. Soit, en effet,

$$\varphi(V, \xi_1, \xi_2, \xi_3; x, y, z) = 0 \tag{66}$$

une première intégrale complète de l'équation (65); pour avoir une nouvelle intégrale complète, il suffit d'établir une, deux ou trois relations entre x, y, z et trois nouveaux paramètres X, Y, Z, puis d'appliquer la méthode de la variation des constantes. Supposons, par exemple, qu'on établisse une seule relation entre x, y, z, X, Y, Z

$$\psi(x, y, z; X, Y, Z) = 0; \tag{67}$$

pour appliquer la méthode de la variation des constantes, il faut éliminer x, y, z entre les équations (66), (67) et (68)

$$\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{\partial\psi}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\frac{\partial\psi}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}{\frac{\partial\psi}{\partial z}}. \tag{68}$$

Or, si nous regardons maintenant V, ξ_1, ξ_2, ξ_3 comme constants et (x, y, z), (X, Y, Z) comme les coordonnées de deux points variables, le calcul précédent revient à chercher l'enveloppe de la surface Σ, représentée par l'équation (67), où X, Y, Z sont les coordonnées courantes, lorsque le point de coordonnées (x, y, z) décrit la surface S représentée par l'équation (66). Cette surface enveloppe se déduit donc de la surface S au moyen de la transformation de contact qui a pour équation directrice l'équation (67). La conclusion est encore la même, s'il y avait deux ou trois rela-

tions entre x, y, z, X, Y, Z; dans le dernier cas, la transformation se réduirait à une transformation ponctuelle.

On voit donc que les équations du second ordre qui correspondent à deux intégrales complètes différentes d'une équation de la forme (65) peuvent se déduire l'une de l'autre par une transformation de contact. Si l'on convient de dire que toutes les équations du second ordre qui peuvent se déduire d'une équation par une transformation de contact forment une *classe,* on voit qu'à toute équation de la forme (65) correspond une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes, dont l'intégrale générale peut être représentée par un système de formules de la forme (55).

30. Proposons-nous maintenant d'examiner si deux équations distinctes de la forme (65) peuvent correspondre à une même classe d'équations du second ordre. Etant donnée une famille de surfaces S à quatre paramètres

$$\Phi(x, y, z, a, b, c, d) = 0,$$

on peut évidemment, d'une infinité de manières, remplacer ces quatre paramètres a, b, c, d par quatre nouveaux paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ en posant

$$a = f_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta),$$

$$b = f_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta),$$

$$c = f_3(\alpha, \beta, \gamma, \delta),$$

$$d = f_4(\alpha, \beta, \gamma, \delta),$$

et la famille de surfaces S est aussi représentée par l'équation

$$\Phi_1(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0.$$

Supposons maintenant qu'on pose $b = \pi(a)$, $c = \pi'(a)$, $d = \chi(a)$, $\pi(a)$ et $\chi(a)$ étant des fonctions quelconques de a; β, γ, δ deviennent des fonctions de α, et, si les formules de transformation sont telles que l'on ait

$$df - cda = \rho(d\beta - \gamma d\alpha),$$

on aura aussi

$$\beta = \pi_1(\alpha), \qquad \gamma = \pi_1'(\alpha), \qquad \delta = \chi_1(\alpha).$$

La fonction Φ_1 doit satisfaire à une équation de la forme (64) en même temps que la fonction Φ, et il est clair qu'à ces deux équations de la forme (65) correspond la même classe d'équations du second ordre. Par conséquent, toutes les équations du premier ordre qui peuvent se déduire de l'équation (65) par une transformation

$$(69)\qquad \left|\begin{aligned} \xi_1 &= f_1(\xi_1', \xi_2', \xi_3', V'),\\ \xi_2 &= f_2(\xi_1', \xi_2', \xi_3', V'),\\ \xi_3 &= f_3(\xi_1', \xi_2', \xi_3', V'),\\ V &= f_4(\xi_1', \xi_2', \xi_3', V'),\end{aligned}\right.$$

telle que l'on ait

$$(70)\qquad d\xi_1 - \xi_3 d\xi_2 = \rho(d\xi_1' - \xi_3' d\xi_2'),$$

correspondent à une même classe d'équations du second ordre.

Remarquons que toutes les transformations de cette espèce changent bien l'équation (65) en une équation de même forme, car les caractéristiques satisfont à la relation

$$d\xi_1 - \xi_3 d\xi_2 = 0,$$

et inversement toutes les équations du premier ordre, dont les caractéristiques vérifient cette relation, sont de la forme (65).

On trouve aisément toutes ces transformations, de la même façon qu'on détermine les transformations de contact. Les valeurs de ξ_1, ξ_2, ξ_3 ne doivent pas dépendre de V' et les formules (69) prennent la forme suivante

$$\xi_1 = f_1(\xi_1', \xi_2', \xi_3'),\qquad \xi_2 = f_2(\xi_1', \xi_2', \xi_3'),\qquad \xi_3 = f_3(\xi_1', \xi_2', \xi_3'),$$
$$V = f_4(\xi_1', \xi_2', \xi_3', V');$$

la fonction f_4 étant arbitraire et les fonctions f_1, f_2, f_3 satisfaisant à l'identité (70).

31. Supposons, par exemple, que l'équation (65) soit linéaire

$$\frac{\partial V}{\partial \xi_1} + \xi_3 \frac{\partial V}{\partial \xi_2} + A \frac{\partial V}{\partial \xi_3} + B = 0,$$

A et B étant des fonctions quelconques de ξ_1, ξ_2, ξ_3, V. Toute intégrale complète est de la forme

$$V = \Phi(x, y, z, V_1, V_2, V_3),$$

V_1, V_2, V_3 désignant trois intégrales particulières distinctes. On voit que les surfaces S représentées par l'équation $V = 0$, où l'on regarde x, y, z comme des coordonnées courantes, ne dépendent que de trois paramètres. C'est le cas particulier que nous avons laissé de côté.

Considérons encore l'équation

$$p_3 - \varphi'(p_1 + \xi_3 p_2) = 0$$

qui admet l'intégrale complète

$$V = a\xi_1 + b\xi_2 + \frac{\varphi(a + b\xi_3)}{b} + c;$$

la fonction Φ correspondante peut s'écrire

$$\Phi = z + ax + \pi(a)y + \frac{\varphi(x + y\pi'(a))}{y} + \chi(a).$$

Les caractéristiques des surfaces S sont des hyperboles ayant une asymptote parallèle à l'axe des z et située dans le plan des xz.

Paris, décembre 1894.

SUR UNE GÉNÉRALISATION DE LA FORMULE

$$\frac{\varphi}{2} = \frac{\sin \varphi}{1} - \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 3\varphi}{3} - \ldots$$

PAR

CARL STÖRMER
À CHRISTIANIA.

1. La formule bien connue

$$(1) \qquad \frac{\varphi}{2} = \frac{\sin \varphi}{1} - \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 3\varphi}{3} - \ldots \qquad (|\varphi| < \pi)$$

est susceptible d'une généralisation assez curieuse, que j'ai publiée dans un petit travail paru en norvegien en 1892 (*Summation af nogle trigonometriske rækker,* Christiania Videnskabs-Selskabs Forhandlinger).

Voici le théorème dont il s'agit:

Si $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sont assujettis à l'inégalité

$$|\varphi_1| + |\varphi_2| + \ldots + |\varphi_n| + |\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_m| < \pi,$$

on a

$$(2) \qquad \frac{\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_n}{2} = \frac{\sin \varphi_1}{1}\frac{\sin \varphi_2}{1}\ldots\frac{\sin \varphi_n}{1}\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \ldots \cos\alpha_m$$
$$- \frac{\sin 2\varphi_1}{2}\frac{\sin 2\varphi_2}{2}\ldots\frac{\sin 2\varphi_n}{2}\cos 2\alpha_1 \cos 2\alpha_2 \ldots \cos 2\alpha_m$$
$$+ \frac{\sin 3\varphi_1}{3}\frac{\sin 3\varphi_2}{3}\ldots\frac{\sin 3\varphi_n}{3}\cos 3\alpha_1 \cos 3\alpha_2 \ldots \cos 3\alpha_m$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La démonstration est facile et peut se faire de plusieurs manières. La plus simple est peut-être celle qui suit.

Supposons la formule vraie pour n quantités φ et m quantités α. Alors, si l'on a

$$|\varphi_1| + |\varphi_2| + \dots + |\varphi_n| + |\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_m| + |\alpha_{m+1}| < \pi,$$

on aura à la fois

$$|\varphi_1 + \alpha_{m+1}| + |\varphi_2| + \dots + |\varphi_n| + |\alpha_1| + \dots + |\alpha_m| < \pi$$

et

$$|\varphi_1 - \alpha_{m+1}| + |\varphi_2| + \dots + |\varphi_n| + |\alpha_1| + \dots + |\alpha_m| < \pi.$$

Par conséquent:

$$\frac{(\varphi_1 + \alpha_{m+1})\varphi_2 \dots \varphi_n}{2}$$
$$= \sum_1^\infty (-1)^{\lambda+1} \frac{\sin \lambda(\varphi_1 + \alpha_{m+1})}{\lambda} \frac{\sin \lambda\varphi_2}{\lambda} \dots \frac{\sin \lambda\varphi_n}{\lambda} \cos \lambda\alpha_1 \dots \cos \lambda\alpha_m,$$

$$\frac{(\varphi_1 - \alpha_{m+1})\varphi_2 \dots \varphi_n}{2}$$
$$= \sum_1^\infty (-1)^{\lambda+1} \frac{\sin \lambda(\varphi_1 - \alpha_{m+1})}{\lambda} \frac{\sin \lambda\varphi_2}{\lambda} \dots \frac{\sin \lambda\varphi_n}{\lambda} \cos \lambda\alpha_1 \dots \cos \lambda\alpha_m.$$

En faisant la demi-somme de ces deux formules, on obtient immédiatement

$$(3) \quad \frac{\varphi_1\varphi_2 \dots \varphi_n}{2} = \sum_1^\infty (-1)^{\lambda+1} \frac{\sin \lambda\varphi_1}{\lambda} \frac{\sin \lambda\varphi_2}{\lambda} \dots \frac{\sin \lambda\varphi_n}{\lambda} \cos \lambda\alpha_1 \dots \cos \lambda\alpha_m \cos \lambda\alpha_{m+1},$$

ce qui est notre formule pour les indices n et $m + 1$.

De l'autre côté, en multipliant la formule (3) par $d\alpha_{m+1}$ et en intégrant de zéro à φ_{n+1}, ce qui est permis si l'on a

$$|\varphi_1| + |\varphi_2| + \dots + |\varphi_n| + |\varphi_{n+1}| + |\alpha_1| + \dots + |\alpha_m| < \pi,$$

on obtient

$$(4) \quad \frac{\varphi_1\varphi_2 \dots \varphi_n\varphi_{n+1}}{2} = \sum (-1)^{\lambda+1} \frac{\sin \lambda\varphi_1}{\lambda} \dots \frac{\sin \lambda\varphi_n}{\lambda} \frac{\sin \lambda\varphi_{n+1}}{\lambda} \cos \lambda\alpha_1 \dots \cos \lambda\alpha_m.$$

C'est la formule (2) pour les indices $n + 1$ et m.

Notre formule (2) découle de cette manière immédiatement de la formule (1).

En faisant dans (2)

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n = \varphi, \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = \alpha,$$

nous aurons la formule curieuse que voici

$$(5) \qquad \frac{\varphi^n}{2} = \left(\frac{\sin\varphi}{1}\right)^n \cos^m\alpha - \left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)^n \cos^m 2\alpha + \left(\frac{\sin 3\varphi}{3}\right)^n \cos^m 3\alpha - \ldots$$

qui est vraie pour

$$n|\varphi| + m|\alpha| < \pi.$$

Des formules démontrées, on peut tirer une foule d'autres, plus ou moins intéressantes. Nous citerons quelques-unes des plus simples.

En faisant dans (5) $n = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, il vient:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\cos^m \alpha}{1} - \frac{\cos^m 3\alpha}{3} + \frac{\cos^m 5\alpha}{5} - \ldots$$

et cette formule est vraie pour

$$|\alpha| < \frac{\pi}{2m}.$$

C'est une généralisation de la formule bien connue

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\cos\alpha}{1} - \frac{\cos 3\alpha}{3} + \frac{\cos 5\alpha}{5} - \ldots.$$

Faisant en (2)

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n = \varphi, \qquad \varphi_{n+1} = \frac{\pi}{2}, \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0,$$

nous aurons l'égalité curieuse

$$\frac{\pi}{4}\varphi^n = \left(\frac{\sin\varphi}{1}\right)^n - \frac{1}{3}\left(\frac{\sin 3\varphi}{3}\right)^n + \frac{1}{5}\left(\frac{\sin 5\varphi}{5}\right)^n - \ldots$$

qui est vraie pour

$$|\varphi| < \frac{\pi}{2n}.$$

Des résultats intéressants s'obtiennent aussi par dérivation des formules par rapport aux quantités φ et α.

Il y a lieu de remarquer que la formule (2) sous la forme

$$\frac{x}{2} = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda}{\lambda} \frac{\sin \lambda\varphi_1}{\lambda\varphi_1} \frac{\sin \lambda\varphi_2}{\lambda\varphi_2} \cdots \frac{\sin \lambda\varphi_n}{\lambda\varphi_n} \cos \lambda\alpha_1 \ldots \cos \lambda\alpha_m \sin \lambda x$$

représente un développement de la fonction $\frac{x}{2}$ en série de Fourier, où les coefficients ont *une infinité de valeurs différentes.* Ce résultat est en accord avec une remarque de M. Jordan (*Cours d'analyse,* II, 2[me] édit. p. 242): en effet, la fonction étant donnée seulement dans l'intervalle

$$|x| < \pi - |\varphi_1| - \ldots - |\varphi_n| - |\alpha_1| - \ldots - |\alpha_m|$$

et *cet intervalle étant moindre que celui de* $-\pi$ *à* $+\pi$, *les coefficients ne sont pas uniques.*

2. Il est évident que les considérations qui précèdent suffisent pour déterminer la valeur de la série au second membre de (2) pour toutes les valeurs réelles de $\varphi_1 \ldots \varphi_n$, $\alpha_1 \ldots \alpha_m$.

Nous nous bornerons à considérer, à titre d'exemples, les cas les plus simples.

Désignons par $F(\varphi_1, \varphi_2)$ la fonction représentée par la série

$$\frac{\sin \varphi_1}{1} \frac{\sin \varphi_2}{1} - \frac{\sin 2\varphi_1}{2} \frac{\sin 2\varphi_2}{2} + \frac{\sin 3\varphi_1}{3} \frac{\sin 3\varphi_2}{3} - \ldots.$$

C'est une fonction continue de φ_1, φ_2, qui satisfait aux équations suivantes

$$\begin{aligned} F(\varphi_2, \varphi_1) &= F(\varphi_1, \varphi_2), \\ F(\varphi_1 + 2\pi, \varphi_2) &= F(\varphi_1, \varphi_2), \\ F(-\varphi_1, \varphi_2) &= -F(\varphi_1, \varphi_2), \\ F(\pi - \varphi_1, \pi - \varphi_2) &= F(\varphi_1, \varphi_2). \end{aligned}$$

Il suit de ces équations, qu'il suffit de pouvoir calculer la valeur de la fonction pour des arguments satisfaisant aux conditions

$$0 \leqq \varphi_1 \leqq \pi, \qquad 0 \leqq \varphi_2 \leqq \pi,$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 \leqq \pi.$$

Pour $\varphi_1 + \varphi_2 < \pi$, on a, comme nous avons vu:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_2} F(\varphi_1 , \varphi_2) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)\right] = \frac{1}{2}\varphi_1$$

donc, parce que $F(\varphi_1 , 0) = 0$

$$F(\varphi_1 , \varphi_2) = \frac{1}{2}\varphi_1\varphi_2. \tag{a}$$

On voit aisément que cette formule subsiste encore pour $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi$.

Si l'on a, au contraire:

$$0 \leqq \varphi_1 \leqq \pi, \qquad 0 \leqq \varphi_2 \leqq \pi$$

mais

$$\varphi_1 + \varphi_2 \geqq \pi$$

on aura, par suite de la relation

$$F(\varphi_1 , \varphi_2) = F(\pi - \varphi_1 , \pi - \varphi_2),$$

$\pi - \varphi_1 + \pi - \varphi_2$ étant $\leqq \pi$,

$$F(\varphi_1 , \varphi_2) = \frac{1}{2}(\pi - \varphi_1)(\pi - \varphi_2). \tag{b}$$

Comme on le voit, les formules (a) et (b) s'accordent pour le cas limite $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi$.

Faisant $\varphi_1 = \varphi_2$, on trouve que la série

$$\left(\frac{\sin \varphi}{1}\right)^2 - \left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sin 3\varphi}{3}\right)^2 - \ldots$$

est égale à

$$\frac{1}{2}\varphi^2, \quad \text{si} \quad 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2},$$

mais égale à

$$\frac{1}{2}(\pi - \varphi)^2, \quad \text{si} \quad \frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \pi.$$

Passons maintenant à

$$F(\varphi_1 , \varphi_2 , \varphi_3) = \frac{\sin \varphi_1}{1}\frac{\sin \varphi_2}{1}\frac{\sin \varphi_3}{1} - \frac{\sin 2\varphi_1}{2}\frac{\sin 2\varphi_2}{2}\frac{\sin 2\varphi_3}{2} + \ldots.$$

Cette fonction est continue pour toutes les valeurs réelles de $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, de même que ses dérivées du premier ordre. Elle satisfait aux équations suivantes

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = F(\varphi_1, \varphi_3, \varphi_2) = F(\varphi_2, \varphi_1, \varphi_3),$$
$$F(\varphi_1 + 2\pi, \varphi_2, \varphi_3) = \quad F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3),$$
$$F(-\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = -F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3),$$
$$F(\pi - \varphi_1, \pi - \varphi_2, \varphi_3) = \quad F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3).$$

Par conséquent, il suffit de savoir la calculer pour des arguments satisfaisant aux conditions suivantes

$$\varphi_1 > \varphi_2 > \varphi_3,$$
$$0 < \varphi_1 < \pi, \qquad 0 < \varphi_2 < \pi, \qquad 0 < \varphi_3 < \pi,$$
$$\varphi_1 + \varphi_2 < \pi.$$

Or on a

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_3} F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \frac{1}{2}[F(\varphi_1 + \varphi_3, \varphi_2) + F(\varphi_1 - \varphi_3, \varphi_2)]$$
$$= \frac{1}{2}\varphi_1\varphi_2,$$

si $\varphi_3 < \pi - \varphi_1 - \varphi_2$,

$$\text{mais } = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\pi - \varphi_1 - \varphi_3)(\pi - \varphi_2) + \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_3)\varphi_2\right]$$
$$= \frac{1}{4}\pi(\pi - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3) + \frac{1}{2}\varphi_1\varphi_2,$$

si $\varphi_3 \geq \pi - \varphi_1 - \varphi_2$.

Intégrant, et remarquant que $F(\varphi_1, \varphi_2, 0) = 0$, on trouve

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \frac{1}{2}\varphi_1\varphi_2\varphi_3, \quad \text{si} \quad \varphi_3 \leq \pi - \varphi_1 - \varphi_2$$
$$\text{mais } = \frac{1}{2}\varphi_1\varphi_2\varphi_3 - \frac{1}{8}\pi(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - \pi)^2,$$

si $\varphi_3 \geq \pi - \varphi_1 - \varphi_2$.

Dans le cas où $\varphi_1 + \varphi_2 \geq \pi$, on trouve

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \frac{1}{2}(\pi - \varphi_1)(\pi - \varphi_2)\varphi_3, \quad \text{si} \quad \varphi_3 \leq \varphi_1 + \varphi_2 - \pi,$$

$$\text{mais} = \frac{1}{2}(\pi - \varphi_1)(\pi - \varphi_3)\varphi_3 - \frac{1}{8}\pi(\pi - \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3)^2,$$

si $\varphi_3 \geq \varphi_1 + \varphi_2 - \pi$.

La dernière formule peut être transformée en

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \frac{1}{2}\varphi_1\varphi_2\varphi_3 - \frac{1}{8}\pi(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - \pi)^2$$

et est démontrée, nous le répétons, pour

$$\varphi_1 \geq \varphi_2 \geq \varphi_3,$$

$$0 \leq \varphi_1 \leq \pi, \qquad 0 \leq \varphi_2 \leq \pi, \qquad 0 \leq \varphi_3 \leq \pi,$$

$$\varphi_3 \geq |\varphi_1 + \varphi_2 - \pi|.$$

Si nous faisons dans ces formules

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi,$$

on trouve que la série

$$\left(\frac{\sin \varphi}{1}\right)^3 - \left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)^3 + \left(\frac{\sin 3\varphi}{3}\right)^3 - \dots$$

représente une fonction impaire, continue avec sa première dérivée pour toutes les valeurs réelles de φ, et qui est égale à

$$\frac{1}{2}\varphi^3, \quad \text{si} \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3},$$

et à

$$\frac{1}{2}\varphi^3 - \frac{1}{8}\pi(3\varphi - \pi)^2 = \frac{1}{8}(4\varphi - \pi)(\varphi - \pi)^2, \quad \text{si} \quad \frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \pi.$$

3. Comme on le voit, les résultats obtenus au moyen de ce mode de calcul, ne sont pas bien faciles à résumer sous une forme concise. Aussi, si on voulait déterminer, dans le cas général, la somme de la série

$$\sum_1^{\infty} (-1)^{\lambda+1} \frac{\sin \lambda\varphi_1}{\lambda} \frac{\sin \lambda\varphi_2}{\lambda} \cdots \frac{\sin \lambda\varphi_n}{\lambda} \cos \lambda\alpha_1 \cos \lambda\alpha_2 \dots \cos \lambda\alpha_m$$

il semble préférable de se servir d'un procédé que j'ai indiqué dans mon travail déjà cité, et qui est basé sur la transformation du produit $\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_n \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \ldots \cos\alpha_m$ en une somme algébrique de sinus et cosinus des arguments de la forme

$$[\varphi_1 \pm \varphi_2 \pm \cdots \pm \varphi_n \pm \alpha_1 \pm \alpha_2 \pm \cdots \pm \alpha_m].$$

De cette manière, tout est réduit à la sommation des séries

$$S_p(\varphi) = \frac{\sin\varphi}{1^{2p+1}} - \frac{\sin 2\varphi}{2^{2p+1}} + \frac{\sin 3\varphi}{3^{2p+1}} - \cdots,$$

$$C_p(\varphi) = \frac{\cos\varphi}{1^{2p}} - \frac{\cos 2\varphi}{2^{2p}} + \frac{\cos 3\varphi}{3^{2p}} - \cdots,$$

sommation qui est très facile.

On trouve, en effet, en définissant le symbole $[\varphi]$ par les conditions

$$[\varphi] \equiv \varphi, \bmod 2\pi,$$

$$-\pi < [\varphi] \leqq \pi$$

que les sommes de ces séries seront

$$(-1)^p S_p(\varphi)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{[\varphi]^{2p+1}}{\lfloor 2p+1} - a_1\pi^2\frac{[\varphi]^{2p-1}}{\lfloor 2p-1} + a_2\pi^4\frac{[\varphi]^{2p-3}}{\lfloor 2p-3} - \cdots + (-1)^p a_p \pi^{2p}\frac{[\varphi]}{\lfloor 1},$$

$$C_p(\varphi) = \frac{\partial S_p(\varphi)}{\partial[\varphi]}.$$

Les coefficients a_p peuvent être déterminés par la condition que S_p doit s'annuler pour $[\varphi] = \pi$, ce qui donne:

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\lfloor 2p+1} - a_1\frac{1}{\lfloor 2p-1} + a_2\frac{1}{\lfloor 2p-3} - \cdots + (-1)^p a_p = 0.$$

D'ailleurs on trouve, en faisant $[\varphi] = 0$ dans C_p,

$$a_p = \pi^{-2p}\left[1 - \frac{1}{2^{2p}} + \frac{1}{3^{2p}} - \frac{1}{4^{2p}} + \cdots\right] = B_p\frac{2^{2p-1}-1}{\lfloor 2p},$$

B_p étant les nombres de Bernoulli.

Si l'on prend comme exemple la série

$$\left(\frac{\sin\varphi}{1}\right)^n - \left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)^n + \left(\frac{\sin 3\varphi}{3}\right)^n - \ldots,$$

le résultat est très facile à écrire.

Puisqu'on peut écrire

$$\sin^{2p+1}\varphi = A_0^{(p)}\sin\varphi + A_1^{(p)}\sin 3\varphi + \ldots + A_p^{(p)}\sin(2p+1)\varphi,$$

$$\sin^{2p}\varphi = B_0^{(p)} + B_1^{(p)}\cos 2\varphi + B_2^{(p)}\cos 4\varphi + \ldots + B_p^{(p)}\cos 2p\varphi,$$

$A_0^{(p)}\ldots A_p^{(p)}$, $B_0^{(p)}\ldots B_p^{(p)}$ étant des constantes rationnelles faciles à déterminer, on a en effet les formules

$$\left(\frac{\sin\varphi}{1}\right)^{2p} - \left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)^{2p} + \left(\frac{\sin 3\varphi}{3}\right)^{2p} - \ldots$$

$$= B_0^{(p)}C_p(0) + B_1^{(p)}C_p(2\varphi) + \ldots + B_p^{(p)}C_p(2p\varphi),$$

$$\left(\frac{\sin\varphi}{1}\right)^{2p+1} - \left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)^{2p+1} + \left(\frac{\sin 3\varphi}{3}\right)^{2p+1} - \ldots$$

$$= A_0^{(p)}S_p(\varphi) + A_1^{(p)}S_p(3\varphi) + \ldots + A_p^{(p)}S_p((2p+1)\varphi)$$

qui mettent en évidence les discontinuités que présentent, la dérivée d'ordre $2p-1$ de

$$\left(\frac{\sin\varphi}{1}\right)^{2p} - \left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)^{2p} + \left(\frac{\sin 3\varphi}{2}\right)^{2p} - \ldots$$

pour

$$\begin{array}{llll} \pm\varphi = & \dfrac{\pi}{2p}, & \dfrac{\pi}{2p-2}, \ldots, \dfrac{\pi}{2}, & \\ & \dfrac{3\pi}{2p}, & \dfrac{3\pi}{2p-2}, \ldots, \dfrac{3\pi}{4}, & \\ & \dfrac{5\pi}{2p}, & \dfrac{5\pi}{2p-2}, \ldots, & \pmod{2\pi} \\ & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\ & \dfrac{(2p-1)\pi}{2p}, & & \end{array}$$

et la dérivée d'ordre $2p$ de

$$\left(\frac{\sin\varphi}{1}\right)^{2p+1}-\left(\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)^{2p+1}+\left(\frac{\sin 3\varphi}{3}\right)^{2p+1}-\dots$$

pour $\varphi\equiv\pi$, et pour

$$\begin{aligned}\pm\varphi\equiv\ &\frac{\pi}{2p+1},\ \frac{\pi}{2p-1},\ \dots,\ \frac{\pi}{3},\\ &\frac{3\pi}{2p+1},\ \frac{3\pi}{2p-1},\ \dots,\ \frac{3\pi}{5},\\ &\frac{5\pi}{2p+1},\ \frac{5\pi}{2p-2},\ \dots,\ \frac{5\pi}{7},\quad \pmod{2\pi}\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\\ &\frac{(2p-1)\pi}{2p+1}.\end{aligned}$$

Février 1895.

ÜBER DIE ANZAHL DER CLASSEN BINÄRER QUADRATISCHER FORMEN VON NEGATIVER DETERMINANTE

VON

A. HURWITZ
in ZÜRICH.

I.

In der vorliegenden Abhandlung bezeichnet der Buchstabe P stets eine positive ungerade ganze Zahl, die grösser als 1 ist und ausser durch 1 durch keine Quadratzahl theilbar ist. Ferner bedeutet $h(D)$ die Anzahl der Classen, in welche die eigentlich primitiven positiven Formen

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

der negativen Determinante

$$b^2 - ac = -D$$

zerfallen. Wenn zur Abkürzung der Schreibweise

$$\frac{1}{8} P = \omega$$

gesetzt wird, so bestehen nach DIRICHLET [1] die folgenden Gleichungen, welche die Classenzahlen durch Summen von Legendre-Jacobischen Zeichen darstellen:

[1] *Vorlesungen über Zahlentheorie* (herausgegeben von R. DEDEKIND) § 106.

$$\text{I.} \qquad h(P) = \sum_{0}^{4\omega} \left(\frac{s}{P}\right), \qquad \text{falls } P \equiv 3 \pmod{4},$$

$$\text{II.} \qquad h(P) = 2 \sum_{0}^{2\omega} \left(\frac{s}{P}\right), \qquad \text{falls } P \equiv 1 \pmod{4},$$

$$\text{III.} \qquad h(2P) = 2 \sum_{\omega}^{3\omega} \left(\frac{s}{P}\right), \qquad \text{falls } P \equiv 3 \pmod{4},$$

$$\text{IV.} \qquad h(2P) = 2 \left\{ \sum_{0}^{\omega} \left(\frac{s}{P}\right) - \sum_{3\omega}^{4\omega} \left(\frac{s}{P}\right) \right\}, \qquad \text{falls } P \equiv 1 \pmod{4}.$$

Unter dem Zeichen

$$\sum_{m}^{n} f(s)$$

ist hier, wie stets in der Folge, die Summe derjenigen Werthe der Function f zu verstehen, welche den im Intervalle $m \ldots n$ liegenden ganzzahligen Argumenten s entsprechen, so dass sich also die Summation auf alle ganzen Zahlen s erstreckt, welche die Ungleichungen

$$m \leqq s \leqq n$$

erfüllen.

Da jedes Legendre-Jacobische Zeichen einen der Werthe $0, 1, -1$ besitzt, so leuchtet ein, dass die Classenzahlen $h(P)$ und $h(2P)$ einen unterhalb $\frac{1}{2}P$, also umsomehr unter P liegenden Werth besitzen. Kennt man daher eine Zahl, welcher $h(P)$ oder $h(2P)$ nach dem Modul P congruent ist, so ist die Classenzahl $h(P)$ oder $h(2P)$ als der kleinste positive Rest jener Zahl modulo P eindeutig bestimmt. Von dieser Bemerkung ausgehend, bin ich zu einer Reihe von Sätzen gelangt, die ich im Folgenden entwickeln will. Zur Orientirung über die Natur dieser Sätze, will ich hier zunächst die einfachsten derselben, die sich auf den Fall beziehen, wo P eine Primzahl ist, angeben.

1. Satz. *Die Entwicklung von* $\operatorname{tg} x$ *nach Potenzen von* x *laute:*

$$\operatorname{tg} x = \alpha_1 x + \alpha_2 \frac{x^3}{\underline{|3}} + \alpha_3 \frac{x^5}{\underline{|5}} + \cdots + \alpha_n \frac{x^{2n-1}}{\underline{|(2n-1)}} + \cdots.$$

Wenn nun p irgend eine Primzahl von der Form $4n + 3$ *bezeichnet, so ist die Classenzahl* $h(p)$ *der kleinste positive Rest von*

$$(-1)^{\frac{p+1}{4}} \frac{1}{2} \alpha_{\frac{p+1}{4}}$$

nach dem Modul p.

Beispielsweise ist die Classenzahl $h(11)$ bestimmt durch die Congruenz

$$h(11) \equiv -\frac{1}{2} \alpha_3 \pmod{11}$$

und hat also, da $\alpha_3 = 16$ ist, den Werth 3.

2. Satz. *Die Entwicklung von* $\frac{1}{\cos x}$ *nach Potenzen von x laute:*

$$\frac{1}{\cos x} = \beta_0 + \beta_1 \frac{x^2}{\underline{|2}} + \beta_2 \frac{x^4}{\underline{|4}} + \ldots + \beta_n \frac{x^{2n}}{\underline{|(2n)}} + \ldots .$$

Wenn nun p irgend eine Primzahl von der Form $4n + 1$ *bezeichnet, so ist die Classenzahl* $h(p)$ *der kleinste positive Rest von*

$$(-1)^{\frac{p-1}{4}} \frac{1}{2} \beta_{\frac{p-1}{4}}$$

nach dem Modul p.

Zum Beispiel ist hiernach

$$h(17) \equiv \frac{1}{2} \beta_4 \pmod{17}$$

und also $h(17) = 4$, da $\beta_4 = 1385$ ist.

3. Satz. *Die Entwicklung von* $\frac{\sin x}{\cos 2x}$ *nach Potenzen von x laute:*

$$\frac{\sin x}{\cos 2x} = \gamma_1 x + \gamma_2 \frac{x^3}{\underline{|3}} + \gamma_3 \frac{x^5}{\underline{|5}} + \ldots + \gamma_n \frac{x^{2n-1}}{\underline{|(2n-1)}} + \ldots .$$

Wenn nun p irgend eine Primzahl von der Form $4n + 3$ *bezeichnet, so ist die Classenzahl* $h(2p)$ *der kleinste positive Rest von*

$$(-1)^{\frac{p+1}{4}} \cdot \gamma_{\frac{p+1}{4}}$$

nach dem Modul p.

Beispiel: $h(22) \equiv -\gamma_3 \equiv -361 \pmod{11}$, also $h(22) = 2$.

4. Satz. *Die Entwicklung von* $\frac{\cos x}{\cos 2x}$ *nach Potenzen von* x *laute:*

$$\frac{\cos x}{\cos 2x} = \delta_0 + \delta_1 \frac{x^2}{\underline{|2}} + \delta_2 \frac{x^4}{\underline{|4}} + \cdots + \delta_n \frac{x^{2n}}{\underline{|(2n)}} + \cdots.$$

Wenn nun p *irgend eine Primzahl von der Form* $4n+1$ *bezeichnet, so ist die Classenzahl* $h(2p)$ *der kleinste positive Rest von*

$$(-1)^{\frac{p-1}{4}} \cdot \delta_{\frac{p-1}{4}}$$

nach dem Modul p.

Beispiel: $h(26) \equiv -\delta_3 \equiv -2763 \pmod{13}$, also $h(26) = 6$.

Um den Gang der Untersuchung später nicht unterbrechen zu müssen, knüpfe ich an diese Sätze gleich hier einige Bemerkungen:

Die Tangentencoefficienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ stehen bekanntlich zu den Bernoullischen Zahlen $B_1, B_2, \ldots$ in der Beziehung

$$\alpha_n = \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n} B_n.$$

Daher ist

$$\frac{1}{2}\alpha_{\frac{p+1}{4}} \equiv 2^{\frac{p+1}{2}}\left(2^{\frac{p+1}{2}} - 1\right) B_{\frac{p+1}{4}} \equiv 2\left(2^p - 2^{\frac{p-1}{2}}\right) B_{\frac{p+1}{4}} \equiv 2\left(2 - \left(\frac{2}{p}\right)\right) B_{\frac{p+1}{4}} \pmod{p}.$$

Der Satz 1. kann hiernach auch dahin ausgesprochen werden, dass die Classenzahl $h(p)$ durch die Congruenz bestimmt ist

$$h(p) \equiv -6 B_{\frac{p+1}{4}} \pmod{p},$$

wenn p eine Primzahl von der Form $8n+3$ und durch die Congruenz

$$h(p) \equiv 2 B_{\frac{p+1}{4}} \pmod{p},$$

wenn p eine Primzahl von der Form $8n+7$ ist.

Bei dieser Formulirung des Satzes ist aber der Fall $p = 3$ auszuschliessen, was darin seinen Grund hat, dass für diesen (und nur für diesen) Fall $B_{\frac{p+1}{4}}$ einen durch p theilbaren Nenner besitzt.

Die Coefficienten $\beta_0, \beta_1, \ldots$ sind die sogenannten Euler'schen Zahlen. Bekanntlich sind diese, ebenso wie die Tangentencoefficienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, *positive ganze* Zahlen. Das Gleiche gilt aber, wie ich jetzt zeigen will, auch für die Entwicklungscoefficienten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ und $\delta_0, \delta_1, \ldots$.

Dass diese Entwicklungscoefficienten *ganze* Zahlen sind, ergiebt sich unmittelbar aus den Recursionsformeln, welche man für dieselben aus den identischen Gleichungen:

$$\frac{\sin x}{\cos 2x} \cos 2x = \sin x, \qquad \frac{\cos x}{\cos 2x} \cos 2x = \cos x$$

erhält. Um zu beweisen, dass dieselben *positive* Zahlen sind, zerlege ich

$$\frac{\cos x + \sin x}{\cos 2x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}$$

in Partialbrüche:

$$\frac{\cos x + \sin x}{\cos 2x} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{1}^{\infty}{}_{k} \frac{(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}}{(2k-1)\frac{\pi}{4} + (-1)^k x},$$

wobei die Glieder der Summe nach wachsenden Werthen von k anzuordnen sind. Entwickelt man die einzelnen Glieder nach aufsteigenden Potenzen von x und vergleicht die Coefficienten von x^n auf beiden Seiten der vorstehenden Gleichung, so ergiebt sich:

$$\gamma_n = \underline{|(2n-1)} \left(\frac{4}{\pi}\right)^{2n} \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{1 - \frac{1}{3^{2n}} - \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \frac{1}{9^{2n}} - - + + \ldots\right\},$$

$$\delta_n = \underline{|(2n)} \left(\frac{4}{\pi}\right)^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{1 + \frac{1}{3^{2n+1}} - \frac{1}{5^{2n+1}} - \frac{1}{7^{2n+1}} + \frac{1}{9^{2n+1}} + - - + \ldots\right\}.$$

Aus diesen Darstellungen der Zahlen γ_n, δ_n geht nun hervor, dass dieselben *positive* Werthe besitzen. Denn die Differenzen $1 - \frac{1}{3^{2n}} - \frac{1}{5^{2n}}$, $\frac{1}{7^{2n}} - \frac{1}{11^{2n}}$, $\frac{1}{9^{2n}} - \frac{1}{13^{2n}}$, ..., ebenso wie $1 - \frac{1}{5^{2n+1}}$, $\frac{1}{3^{2n+1}} - \frac{1}{7^{2n+1}}$, ... sind sämmtlich positiv.

2.

Zur Abkürzung der Beweise für die oben angegebenen Sätze und für andere Sätze ähnlichen Charakters, benutze ich den Begriff der Congruenz in einem erweiterten Umfange. Einerseits dehne ich den Begriff der Congruenz, wie dies auch sonst seit Gauss hin und wieder geschieht, auf rationale Zahlen aus. Zwei rationale Zahlen r und s mögen nämlich nach dem ganzzahligen Modul m congruent heissen, in Zeichen

(1) $$r \equiv s \pmod{m},$$

wenn ihre Differenz $r - s$, auf die kleinste Benennung gebracht, einen durch m theilbaren Zähler besitzt. Dass derartige Congruenzen addirt und subtrahirt werden dürfen, d. h. dass aus der Congruenz (1) und der Congruenz

(2) $$r' \equiv s' \pmod{m}$$

die neuen Congruenzen

$$r \pm r' \equiv s \pm s' \pmod{m}$$

folgen, leuchtet unmittelbar ein.

Um die Gesetze für die Multiplication und Division solcher Congruenzen leicht aussprechen zu können, ist es zweckmässig noch folgende Definitionen einzuführen:

Eine rationale Zahl heisse *endlich* nach dem Modul m, wenn sie, auf die kleinste Benennung gebracht, einen zu m theilerfremden Nenner besitzt.

Eine rationale Zahl heisse *relativ prim* zum Modul m, wenn sie selbst und zugleich ihr reciproker Werth endlich nach dem Modul m ist.

Eine rationale Zahl, die man auf die kleinste Benennung gebracht hat, ist offenbar stets und nur dann relativ prim zu m, wenn sowohl ihr Zähler wie ihr Nenner theilerfremd zu m ist.

Man zeigt ferner leicht, dass zwei nach dem Modul m congruente rationale Zahlen gleichzeitig endlich modulo m oder nicht und gleichzeitig relativ prim zu m oder nicht sind.

Was nun die Gesetze der Multiplication und Division für die hier betrachteten Congruenzen angeht, so sind dieselben in folgenden Sätzen enthalten, deren Beweise ich übergehe, da sie ganz elementarer Natur sind.

»Besteht die Congruenz (1), so bleibt dieselbe richtig, wenn ihre Glieder r und s mit irgend einer (mod. m) endlichen Zahl multiplicirt werden.»

»Aus den Congruenz (1) und (2) darf man die Congruenz

$$rr' \equiv ss' \pmod{m}$$

folgern, wenn r und r' endlich nach dem Modul m sind.»

»Die Congruenz (1) zieht die Congruenz

$$\frac{1}{r} \equiv \frac{1}{s} \pmod{m}$$

nach sich, wenn r relativ prim zu m ist.»

»Aus den Congruenzen (1) und (2) darf man die Congruenz

$$\frac{r'}{r} \equiv \frac{s'}{s} \pmod{m}$$

folgern, wenn r' endlich und r relativ prim zum Modul m ist.»

Eine andere Erweiterung des Congruenzbegriffes, die ich im Folgenden benutze, bezieht sich auf Potenzreihen mit rationalen Coefficienten. Es seien

(3) $$\varphi(x) = r_0 + r_1 x + r_2 \frac{x^2}{|\underline{2}} + \ldots + r_n \frac{x^n}{|\underline{n}} + \ldots,$$

(4) $$\psi(x) = s_0 + s_1 x + s_2 \frac{x^2}{|\underline{2}} + \ldots + s_n \frac{x^n}{|\underline{n}} + \ldots$$

zwei Potenzreihen, die in der Umgebung der Stelle $x = 0$ convergiren und rationale Coefficienten besitzen. Die Congruenz

(5) $$\varphi(x) \equiv \psi(x) \pmod{m}$$

soll dann nichts anderes ausdrücken, als dass für jeden Index n

(6) $$r_n \equiv s_n \pmod{m}$$

ist. Ferner will ich sagen, die Congruenz (5) bestehe bis zu den Gliedern k^{ter} Ordnung, wenn die Congruenz (6) für $n = 0, 1, 2, \ldots, k$ erfüllt ist.

Die Potenzreihe (3) $\varphi(x)$ möge *endlich* heissen nach dem Modul m, wenn alle Coefficienten $r_0, r_1, r_2, \ldots$ endlich sind nach dem Modul m.

Ist $\varphi(x)$ endlich nach dem Modul m und zugleich das Anfangsglied r_0 relativ prim zu m, so soll $\varphi(x)$ selbst *relativ prim* zu m heissen.

An diese Begriffe knüpfen sich nun die folgenden Sätze:

1.) »Ist $\varphi(x)$ relativ prim zu m, so ist auch $\frac{1}{\varphi(x)}$ relativ prim zu m.«

Denn ist $\frac{1}{\varphi(x)} = r'_0 + r'_1 x + r'_2 \frac{x^2}{|\underline{2}} + \ldots$, so hat man

$$r'_0 r_0 = 1, \qquad r'_1 r_0 + r'_0 r_1 = 0. \qquad r'_2 r_0 + 2 r'_1 r_1 + r'_0 r_2 = 0,$$

$$r'_3 r_0 + 3 r'_2 r_1 + 3 r'_1 r_2 + r'_0 r_3 = 0, \quad \ldots .$$

Berechnet man aus diesen Gleichungen $r'_0, r'_1, r'_2, \ldots$, so erkennt man, dass diese Zahlen sämmtlich endlich und die erste r'_0 überdies relativ prim zum Modul m sind.

Fasst man dieselben Gleichungen als Congruenzen (mod. m) auf, so ergiebt sich leicht der Satz:

2.) »Ist $\varphi(x)$ relativ prim zu m und $\varphi(x) . \varphi_1(x) \equiv 1$ (mod. m), so ist $\varphi_1(x) \equiv \frac{1}{\varphi(x)}$ (mod. m).«

Sind r und s nach dem Modul m congruente und endliche Zahlen, so sind auch r^n und s^n congruent und endlich für jeden positiven ganzzahligen Exponenten n. Daraus folgt:

3.) »Sind r und s nach dem Modul m congruente und endliche Zahlen, so ist

$$\varphi(rx) \equiv \varphi(sx) \pmod{m}$$

wenn $\varphi(x)$ nach dem Modul m endlich ist.«

Zwischen den Potenzreihen (3) und (4) möge jetzt die Congruenz (5) bestehen. Ferner sei

$$(7) \qquad \chi(x) = t_0 + t_1 \frac{x}{|\underline{1}} + t_2 \frac{x^2}{|\underline{2}} + \ldots + t_n \frac{x^n}{|\underline{n}} + \ldots$$

eine (mod. m) endliche Potenzreihe. Ein Blick auf die Gleichungen

$$
(8)\quad \begin{cases} \varphi(x)\chi(x) = r_0t_0 + (r_1t_0 + r_0t_1)\dfrac{x}{\underline{|1}} + (r_2t_0 + 2r_1t_1 + r_0t_2)\dfrac{x^2}{\underline{|2}} + \cdots, \\ \psi(x)\chi(x) = s_0t_0 + (s_1t_0 + s_0t_1)\dfrac{x}{\underline{|1}} + (s_2t_0 + 2s_1t_1 + s_0t_2)\dfrac{x^2}{\underline{|2}} + \cdots \end{cases}
$$

lehrt dann, dass die Potenzreihen $\varphi(x)\chi(x)$ und $\psi(x)\chi(x)$ (mod. m) congruent sind. Es besteht also der Satz:

4.) »Ist $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ (mod. m) und $\chi(x)$ endlich nach dem Modul m, so ist auch $\varphi(x)\chi(x) \equiv \psi(x)\chi(x)$ (mod. m).

Combinirt man hiermit den Satz 1.), so erhält man

5.) »Ist $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ (mod. m) und $\chi(x)$ relativ prim zu m, so ist auch $\dfrac{\varphi(x)}{\chi(x)} \equiv \dfrac{\psi(x)}{\chi(x)}$ (mod. m).»

Sind $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ congruent (mod. m) und relativ prim zu m, bezeichnen ferner für einen Augenblick $\varphi_1(x)$ und $\psi_1(x)$ die Potenzreihen $\dfrac{1}{\varphi(x)}$ bez. $\dfrac{1}{\psi(x)}$, so folgt aus $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ (mod. m) nach Satz 4.)

$$
1 \equiv \varphi(x)\varphi_1(x) \equiv \psi(x)\varphi_1(x) \pmod{m}
$$

und hieraus nach Satz 2.) $\varphi_1(x) \equiv \psi_1(x)$ (mod. m). D. h.

6.) »Ist $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ (mod. m) und $\varphi(x)$ relativ prim zu m, so ist auch $\dfrac{1}{\varphi(x)} \equiv \dfrac{1}{\psi(x)}$ (mod. m)».

Es seien jetzt $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ irgend vier Potenzreihen mit rationalen Coefficienten und

$$
(9)\quad \begin{cases} \varphi(x) \equiv \psi(x) \pmod{m}, \\ \varphi_1(x) \equiv \psi_1(x) \pmod{m} \end{cases}
$$

Dann gelten für die Combination dieser Congruenzen durch Addition, Subtraction, Multiplication und Division folgende Gesetze:

7.) Aus den Congruenzen (9) darf man folgern

a) die Congruenzen $\varphi(x) \pm \varphi_1(x) \equiv \psi(x) \pm \psi_1(x)$ (mod. m) ohne jede Einschränkung;

b) die Congruenz $\varphi(x)\varphi_1(x) \equiv \psi(x)\psi_1(x)$ (mod. m), wenn $\varphi(x)$ und $\varphi_1(x)$ endlich sind modulo m;

c) die Congruenz $\dfrac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)} \equiv \dfrac{\psi_1(x)}{\psi(x)}$ (mod. m), wenn $\varphi_1(x)$ endlich (mod. m) und $\varphi(x)$ relativ prim zu m ist.

Schliesslich habe ich noch einen in der Folge wiederholt zur Anwendung gelangenden Satz zu entwickeln, der sich auf die Frage bezieht, in wie weit eine Congruenz $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ (mod. m) durch eine mit x verschwindende Potenzreihe $\chi(x)$ dividirbar ist. Ich nehme an, dass $\chi(x)$ von der ersten Ordnung verschwindet, dass also

$$\chi(x) = t_1 x + t_2 \frac{x^2}{\underline{|2}} + t_3 \frac{x^3}{\underline{|3}} + \cdots$$

ist, wo t_1 von Null verschieden. Ferner setze ich voraus, dass $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ für $x = 0$ verschwinden, also r_0 und s_0 in den Entwicklungen (3) und (4) Null sind. Ist nun

$$\frac{\varphi(x)}{\chi(x)} = \varphi_1(x) = r'_0 + r'_1 x + r'_2 \frac{x^2}{\underline{|2}} + \cdots,$$

$$\frac{\psi(x)}{\chi(x)} = \psi_1(x) = s'_0 + s'_1 x + s'_2 \frac{x^2}{\underline{|2}} + \cdots,$$

so folgt aus der Annahme $\varphi(x) \equiv \psi(x)$, oder $\varphi_1(x)\chi(x) \equiv \psi_1(x)\chi(x)$ (mod. m), dass die Zahlen

$$r'_0 t_1\,,\ 2r'_1 t_1 + r'_0 t_2\,,\ 3r'_2 t_1 + 3r'_1 t_2 + r'_0 t_3\,,\ \ldots$$

der Reihe nach (mod. m) congruent sind den Zahlen

$$s'_0 t_1\,,\ 2s'_1 t_1 + s'_0 t_2\,,\ 3s'_2 t_1 + 3s'_1 t_2 + s'_0 t_3\,,\ \ldots.$$

Hieraus ergiebt sich successive $r'_0 \equiv s'_0$, $r'_1 \equiv s'_1$, ..., $r'_{p-1} \equiv s'_{p-1}$ (mod. m) unter der Annahme, dass $t_1, 2t_1, 3t_1, \ldots, (p-1)t_1$ relativ prim zu m und $t_2, t_3, \ldots, t_p$ endlich nach dem Modul m sind. Die erstere Annahme ist erfüllt, wenn t_1 relativ prim zu m und p die kleinste in m aufgehende Primzahl ist. Hiernach kann man folgenden Satz aussprechen:

8.) »Sind $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ mit x verschwindende Potenzreihen und ist

$$\chi(x) = t_1 x + t_2 \frac{x^2}{\underline{|2}} + t_3 \frac{x^3}{\underline{|3}} + \cdots$$

endlich nach dem Modul m, während zugleich t_1 relativ prim zu m ist, so folgt aus dem Bestehen der Congruenz

$$\varphi(x) \equiv \psi(x) \text{ (mod. } m),$$

dass die Congruenz

$$\frac{\varphi(x)}{\chi(x)} \equiv \frac{\psi(x)}{\chi(x)} \pmod{m}$$

bis zu den Gliedern $(p-1)^{\text{ter}}$ Ordnung gilt, unter p die kleinste in m aufgehende Primzahl verstanden.»

3.

Ehe ich zu dem eigentlichen Gegenstande dieser Abhandlung übergehe, will ich die Sätze der vorigen Nummer an einigen Beispielen erläutern.

Nach dem Modul 3 bestehen (Satz 3.) der vorigen Nummer) die Congruenzen

$$\cos 3x \equiv 1, \qquad \cos 2x \equiv \cos(-x) \equiv \cos x \pmod{3}.$$

Die elementare Gleichung $\cos x(2\cos 2x - 1) = \cos 3x$, ergiebt daher die Congruenz

$$\cos x(2\cos x - 1) \equiv 1 \pmod{3}.$$

Also ist (nach Satz 2. oder 5. der vorigen Nummer)

$$(1) \qquad \frac{1}{\cos x} \equiv 2\cos x - 1 \equiv -(1 + \cos x) \pmod{3}.$$

Der Coefficient von $\dfrac{x^{2n}}{|\underline{(2n)}}$ auf der linken Seite dieser Congruenz ist die Euler'sche Zahl β_n, auf der rechten Seite ist derselbe $(-1)^{n+1}$. Man erhält also den bekannten Satz, nach welchem die Euler'sche Zahl β_n von der Form $3k-1$ oder $3k+1$ ist, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

In ähnlicher Weise ergiebt sich die Congruenz

$$(2) \qquad \frac{1}{\cos x} \equiv 1 + 2\cos x - 2\cos 2x \pmod{5},$$

welche den Satz enthält, dass die Euler'sche Zahl $\beta_n \equiv 1$ oder $0 \pmod{5}$ ist, je nachdem n ungerade oder gerade ist. Aus der Congruenz

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x \equiv x \pmod{4}$$

folgt

$$\frac{x}{\cos x} \equiv \sin x \pmod{4}.$$

Da der Coefficient von $\frac{x^{2n+1}}{\lfloor 2n+1}$ auf der linken Seite

$$(2n+1)\beta_n \equiv (-1)^n \beta_n \pmod{4},$$

auf der rechten Seite $(-1)^n$ ist, so besagt diese Congruenz, dass die Euler'schen Zahlen sämmtlich $\equiv 1 \pmod{4}$ sind.

Multiplicirt man die vorstehenden Congruenzen (1) und (2) mit $\sin x$, so erhält man

$$\frac{\sin x}{\cos x} \equiv -\left(\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) \equiv -(\sin x + \sin x) \equiv \sin x \pmod{3},$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} \equiv \sin x + \sin 2x - \sin 3x + \sin x \equiv 2(\sin x + \sin 2x) \pmod{5}.$$

D. h. der Tangentencoefficient α_n ist $\equiv 1$ oder 2 nach den Moduln 3 und 5 (und also nach dem Modul 15) je nachdem n ungerade oder gerade ist. Um den Rest von α_n (mod. 8) zu beurtheilen, bemerke man dass

$$\cos^4 x = \frac{3 + 4\cos 2x + \cos 4x}{8} \equiv 1 \pmod{8},$$

folglich

$$\frac{\sin x}{\cos x} \equiv \sin x \cos^3 x = \frac{2\sin 2x + \sin 4x}{8} \equiv x - 2\frac{x^3}{\lfloor 3} \pmod{8}$$

ist. Der Tangentencoefficient α_n ist also durch 8 theilbar, sobald $n > 2$.[1]

Ähnliche Sätze gelten für die Entwicklungscoefficienten γ_n und δ_n der Functionen $\frac{\sin x}{\cos 2x}$ und $\frac{\cos x}{\cos 2x}$. Beispielsweise folgt aus der Congruenz

---

[1] Diese Thatsache geht übrigens auch aus der Gleichung $\alpha_n = \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n} B_n$ hervor, nach welcher $2^{2n-\lambda-2}$ die höchste in α_n aufgehende Potenz von 2 ist, wenn 2^λ die höchste in n aufgehende Potenz von 2 bezeichnet.

Wegen der auf die Tangentencoefficienten und Euler'schen Zahlen bezüglichen Congruenzen vergleiche man die Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen von L. Saalschütz (Berlin 1893), in welchen auch die Litteratur angegeben ist.

$$\cos 2x \equiv 1 - 2x^2 \pmod{8},$$

$$\frac{1}{\cos 2x} \equiv \frac{1}{1 - 2x^2} \equiv 1 + 2x^2 \pmod{8}$$

und hieraus weiter

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sin x}{\cos 2x} &\equiv \sin x(1 + 2x^2) \\ \frac{\cos x}{\cos 2x} &\equiv \cos x(1 + 2x^2) \end{aligned}\right| \pmod{8}.$$

Die letzten Congruenzen besagen, dass $\gamma_n \equiv 1$ oder $3 \pmod{8}$ und $\delta_n \equiv 3$ oder $1 \pmod{8}$ ist, je nachdem der Index n ungerade oder gerade ist.

4.

Wenn p eine Primzahl ist und zur Abkürzung $\frac{p-1}{2} = p'$ gesetzt wird, so hat man die Congruenz

$$\left(\frac{s}{p}\right) \equiv s^{p'} \pmod{p}.$$

Daher wird für den Fall, dass $p \equiv 3 \pmod{4}$ ist,

$$h(p) \equiv 1^{p'} + 2^{p'} + 3^{p'} + \ldots + p'^{p'} \pmod{p}.$$

Die auf der rechten Seite dieser Congruenz befindliche Zahl ist nichts anderes wie der Coefficient von $(-1)^{\frac{p'-1}{2}} \cdot \frac{x^!}{\underline{|p'}}$ in der Entwicklung der Function

$$\varphi(x) = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin p'x = \frac{\cos\frac{1}{2}x - \cos\frac{p}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x}.$$

Nun ist nach dem Modul p

$$\cos\frac{1}{2}x - \cos\frac{p}{2}x \equiv \cos\frac{1}{2}x - 1;$$

und nach dem Satze 8 in N° 2 ist die Congruenz

$$\varphi(x) \equiv \frac{\cos\frac{1}{2}x - 1}{2\sin\frac{1}{2}x} \equiv -\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{x}{4}}{\cos\frac{x}{4}} \pmod{p}$$

bis zu den Gliedern $(p-1)^{\text{ter}}$ Ordnung gültig. Also ist $h(p)$ nach dem Modul p dem Coefficienten von $(-1)^{\frac{p'-1}{2}} \cdot \frac{x^{p'}}{\underline{|p'}}$ in der Entwicklung von $-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{4}$ congruent. Da dieser Coefficient sich modulo p nicht ändert, wenn x durch $4x$ ersetzt wird, weil er dadurch den Factor $4^{p'} = 2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ erhält, so ist auch $h(p)$ dem mit $(-1)^{\frac{p'-1}{2}+1} = (-1)^{\frac{p+1}{4}}$ multiplicirten Coefficienten von $\frac{x^{p'}}{\underline{|p'}}$ in der Entwicklung von $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x$ congruent, welches die Behauptung des Satzes 1 in N° 1 ist.

Ist p eine Primzahl von der Form $4n+1$, so wird

$$h(p) \equiv 2\left(1^{p'} + 2^{p'} + \ldots + \left(\frac{p'}{2}\right)^{p'}\right) \pmod{p}.$$

Die rechte Seite dieser Congruenz ist der Coefficient von $(-1)^{\frac{p'}{2}} \cdot \frac{x^{p'}}{\underline{|p'}}$ in der Entwicklung von

$$\varphi(x) = 2\left(\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos\frac{p'}{2}x\right) = -1 + \frac{\sin\frac{p+1}{4}x}{\sin\frac{1}{2}x}.$$

Bis zu den Gliedern von der Ordnung $p-1$ ist aber

$$\varphi(x) \equiv -1 + \frac{\sin\frac{1}{4}x}{\sin\frac{1}{2}x} \equiv -1 + \frac{1}{2\cos\frac{1}{4}x} \pmod{p}.$$

Diese Congruenz enthält den Satz 2. von N° 1, wenn man die Bemerkung hinzunimmt, dass der Coefficient von $\frac{x^{p'}}{\underline{|p'}}$ sich modulo p nicht ändert, falls x durch $4x$ ersetzt wird.

Ist p eine Primzahl von der Form $4n+3$, so hat man

$$h(2p) = 2\sum_{\omega}^{3\omega}\left(\frac{s}{p}\right) = 2\sum_{0}^{3\omega}\left(\frac{s}{p}\right) - 2\sum_{1}^{\omega}\left(\frac{s}{p}\right), \qquad \left(\omega = \frac{1}{8}p\right).$$

Die Summation in den beiden letzten Summen ist zu erstrecken auf die Zahlen

$$s = 1\,,\,2\,,\,\ldots\,,\,k \quad \text{bezüglich} \quad s = 1\,,\,2\,,\,\ldots\,,\,h$$

wo

$$k = \frac{3p-1}{8}\,, \qquad h = \frac{p-3}{8} \quad \text{oder} \quad k = \frac{3p-5}{8}\,, \qquad h = \frac{p-7}{8}$$

ist, je nachdem $p \equiv 3$ oder $\equiv 7$ (mod. 8) ist.

Die Classenzahl $h(2p)$ ist nun (mod. p) congruent dem Coefficienten von $(-1)^{\frac{p-1}{2}}\frac{x^p}{|\underline{p}}$ in der Entwicklung von

$$\varphi(x) = 2\sum_1^k \sin(sx) - 2\sum_1^h \sin(sx) = \frac{\cos\left(h+\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}.$$

Bis zu den Gliedern von der Ordnung $p-1$ ist aber

$$\varphi(x) \equiv \frac{\cos\frac{1}{8}x - \cos\frac{3}{8}x}{\sin\frac{1}{2}x} \quad \text{oder} \quad \frac{\cos\frac{3}{8}x - \cos\frac{1}{8}x}{\sin\frac{1}{2}x} \pmod{p}$$

je nachdem $p \equiv 3$ oder $\equiv 7$ (mod. 8). Ferner ist

$$\frac{\cos\frac{3}{8}x - \cos\frac{1}{8}x}{\sin\frac{1}{2}x} = -\frac{\sin\frac{1}{8}x}{\cos\frac{1}{4}x}.$$

Ersetzt man nun x durch $8x$, so wird sich der Coefficient von $\frac{x^p}{|\underline{p}}$ nicht ändern (mod. p), wenn $p \equiv 7$ (mod. 8) ist, dagegen den Factor -1 (mod. p) erhalten, wenn $p \equiv 3$ (mod. 8) ist, weil im ersteren Falle 2 quadratischer Rest, im letzteren Falle quadratischer Nichtrest von p ist. Hiernach leuchtet ein, dass in beiden Fällen $h(2p)$ nach dem Modul p congruent

dem mit $(-1)^{\frac{p'-1}{2}+1} = (-1)^{\frac{p+1}{4}}$ multiplicirten Coefficienten von $\frac{x^{p'}}{|\underline{p'}}$ in der Entwicklung von $\frac{\sin x}{\cos 2x}$ ist.

Ist endlich p eine Primzahl von der Form $4n+1$, so hat man

$$h(2p) = 2\left\{\sum_0^{\omega}\left(\frac{s}{p}\right) + \sum_0^{3\omega}\left(\frac{s}{p}\right) - \sum_0^{4\omega}\left(\frac{s}{p}\right)\right\}, \qquad \left(\omega = \frac{1}{8}p\right)$$

oder, da $\sum\limits_0^{4\omega}\left(\frac{s}{p}\right)$ verschwindet;

$$h(2p) = 2\left\{\sum_0^{\omega}\left(\frac{s}{p}\right) + \sum_0^{3\omega}\left(\frac{s}{p}\right)\right\}.$$

Die Classenzahl $h(2p)$ ist daher nach dem Modul p congruent dem Coefficienten von $(-1)^{\frac{p}{2}}\cdot\frac{x^p}{|\underline{p}}$ in der Entwicklung von

$$\varphi(x) = 2\sum_{s=1}^{k}\cos sx + 2\sum_{s=1}^{h}\cos sx = -1 + \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x + \sin\left(h+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x},$$

wobei

$$k = \frac{p-1}{8}, \qquad h = \frac{3p-3}{8} \quad \text{oder} \quad k = \frac{p-5}{8}, \qquad h = \frac{3p-7}{8}$$

zu nehmen ist, je nachdem $p \equiv 1$ oder $\equiv 5 \pmod{8}$ ist.

Bis zu den Gliedern $(p-1)^{\text{ter}}$ Ordnung ist nun

$$\varphi(x) \equiv -1 + \frac{\cos\frac{1}{8}x}{\cos\frac{1}{4}x} \quad \text{oder} \quad \equiv -1 - \frac{\cos\frac{1}{8}x}{\cos\frac{1}{4}x} \pmod{p},$$

je nachdem $p \equiv 1$ oder $\equiv 5 \pmod{8}$ ist, und hieraus geht durch eine ähnliche Überlegung, wie oben (indem man x durch $8x$ ersetzt), die Richtigkeit des Satzes 4. in N° 1 hervor.

5.

Die Sätze dieser Nummer beziehen sich auf die Classenzahl $h(P)$, wo P mehrere Primfactoren enthält und $\equiv 3 \pmod{4}$ ist. Ich zerlege P in zwei Factoren p und q, setze also

$$P = pq.$$

Über diese Factoren mache ich vorläufig nur die Voraussetzung, dass sie beide grösser als 1 sind.

Nun ist

$$h(P) = \sum \left(\frac{s}{pq}\right) = \sum \left(\frac{s}{p}\right)\left(\frac{s}{q}\right),$$

wo der Summationsbuchstabe s alle zwischen 0 und $\frac{1}{2}pq$ liegenden ganzen Zahlen durchlaufen muss. Indem ich diejenigen Glieder der Summe zusammenfasse, die modulo q congruenten Werthen von s entsprechen, erhalte ich

$$h(P) = \left(\frac{1}{q}\right) \sum_k \left(\frac{qk+1}{p}\right) + \left(\frac{2}{q}\right) \sum_k \left(\frac{qk+2}{p}\right) + \dots$$
$$+ \left(\frac{q-1}{q}\right) \sum_k \left(\frac{qk+q-1}{p}\right),$$

oder kürzer:

$$h(P) = \sum_{i}^{q}{}_{0} \left(\frac{i}{q}\right) \sum_k \left(\frac{qk+i}{p}\right).$$

Die innere Summation erstreckt sich dabei über diejenigen Werthe von k, für welche $qk+i$ zwischen 0 und $\frac{pq}{2}$, also k zwischen $-\frac{i}{q}$ und $\frac{p}{2} - \frac{i}{q} = \frac{p-1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{q}\right)$ liegt. Es nimmt also k die Werthe $0, 1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}$ an, wenn $i < \frac{q}{2}$, dagegen die Werthe $0, 1, 2, \dots, \frac{p-1}{2} - 1$, wenn $i > \frac{q}{2}$. Daher ist

$$h(P) = \sum_{i=0}^{\frac{q}{2}} \left(\frac{i}{q}\right) \sum_{k=0}^{\frac{p}{2}} \left(\frac{qk+i}{p}\right) + \sum_{i=\frac{q}{2}}^{q} \left(\frac{i}{q}\right) \sum_{k=0}^{\frac{p}{2}-1} \left(\frac{qk+i}{p}\right).$$

In der zweiten Summe ersetze ich i durch $q - i$ und erhalte unter Anwendung der Gleichung $\left(\frac{-1}{pq}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{-1}{q}\right) = -1$,

$$h(P) = \sum_0^{\frac{q}{2}} {}_i \left(\frac{i}{q}\right) \sum_0^{\frac{p}{2}} {}_k \left(\frac{qk+i}{p}\right) - \sum_0^{\frac{q}{2}} {}_i \left(\frac{i}{q}\right) \sum_1^{\frac{p}{2}} {}_k \left(\frac{i-qk}{p}\right).$$

Da nun die Zahl $i + qk$ ein vollständiges Restsystem (mod. p) durchläuft, wenn k alle ganze Zahlen zwischen $-\frac{p}{2}$ und $+\frac{p}{2}$ annimmt, so ist $\sum_0^{\frac{p}{2}} {}_k \left(\frac{qk+i}{p}\right) + \sum_1^{\frac{p}{2}} {}_k \left(\frac{i-qk}{p}\right) = 0$, und folglich

$$h(pq) = 2 \sum_0^{\frac{q}{2}} {}_i \left(\frac{i}{q}\right) \sum_0^{\frac{p}{2}} {}_k \left(\frac{i+qk}{p}\right). \tag{1}$$

Es sei jetzt p eine Primzahl von der Form $4n + 3$. Dann lehrt die vorstehende Gleichung, dass

$$h(pq) \equiv (-1)^{\frac{p-3}{4}} \left| 2 \sum_0^{\frac{q}{2}} {}_i \left(\frac{i}{q}\right) \sum_0^{\frac{p}{2}} {}_k \sin(i + qk)x \right| \pmod{p}$$

ist, wo die geschwungene Klammer den Coefficienten von $\dfrac{x^{\frac{p-1}{2}}}{\left|\frac{p-1}{2}\right.}$ in der Entwicklung der eingeklammerten Function bedeutet. Nun ist weiter für jeden Werth von a und b und jedes ganzzahlige positive m:

$$2 \sum_0^{m} {}_k \sin(a + bk) = \frac{\cos\left(a - \frac{1}{2}b\right) - \cos\left(a + \left(m + \frac{1}{2}\right)b\right)}{\sin\frac{1}{2}b} \tag{S}$$

$$= 2 \frac{\sin\frac{m+1}{2}b}{\sin\frac{1}{2}b} \sin\left(a + \frac{m}{2}b\right)$$

und daher bis zu den Gliedern $(p-1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$2\sum_{0}^{\frac{p}{2}}{}_k \sin(i+qk)x \equiv \frac{2\sin\frac{1}{4}qx}{\sin\frac{1}{2}qx}\sin\left(i-\frac{1}{4}q\right)x \equiv \frac{1}{\cos\frac{1}{4}qx}\sin\left(i-\frac{1}{4}q\right)x \pmod{p}.$$

Aus dieser Congruenz ergiebt sich für die Classenzahl $h(pq)$ zunächst:

$$h(pq) \equiv (-1)^{\frac{p-3}{4}} \left| \frac{1}{\cos\frac{1}{4}qx} \sum_{0}^{\frac{q}{2}}{}_i \left(\frac{i}{q}\right) \sin\left(i-\frac{1}{4}q\right)x \right| \pmod{p}.$$

Hier darf offenbar x durch $4x$ und $\left(\frac{i}{q}\right)$ durch $\left(\frac{4i-q}{q}\right)$ oder auch durch $\left(\frac{q-4i}{q}\right)$ ersetzt werden. Daher ist

$$h(pq) \equiv (-1)^{\frac{p+1}{4}} \left| \frac{1}{\cos qx} \sum_{0}^{\frac{q}{4}}{}_i \left(\frac{q-4i}{q}\right) \sin(q-4i)x \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\cos qx} \sum_{\frac{q}{4}}^{\frac{q}{2}}{}_i \left(\frac{4i-q}{q}\right) \sin(4i-q)x \right| \pmod{p}.$$

Da in der ersten Summe $q-4i$ alle zwischen q und 0 liegende Zahlen, die $\equiv q \equiv 1 \pmod{4}$ sind, durchläuft, in der zweiten Summe $4i-q$ alle zwichen 0 und q liegende Zahlen, die $\equiv -q \equiv 3 \pmod{4}$ sind, so ist in der vorstehenden Congruenz der Satz enthalten:

I. *Es sei $q \equiv 1 \pmod{4}$ eine durch kein Quadrat ausser* 1 *theilbare positive Zahl grösser als* 1.

Ferner sei

$$\varphi(x) = \frac{1}{\cos qx}\left[\left(\frac{1}{q}\right)\sin x - \left(\frac{3}{q}\right)\sin 3x + \left(\frac{5}{q}\right)\sin 5x - + \ldots \right.$$
$$\left. - \left(\frac{q-2}{q}\right)\sin(q-2)x\right]$$

und die Entwicklung dieser Function nach Potenzen von x laute

$$\varphi(x) = c_1 x + c_2 \frac{x^3}{\lfloor 3} + c_3 \frac{x^5}{\lfloor 5} + \ldots + c_n \frac{x^{2n-1}}{\lfloor 2n-1} + \ldots.$$

Bezeichnet dann $p \equiv 3 \pmod{4}$ eine in q nicht aufgehende Primzahl, so ist

$$h(pq) \equiv (-1)^{\frac{p+1}{4}} c_{\frac{p+1}{4}} \pmod{p}.$$

Beispielsweise werden also die Reste der Classenzahlen $h(5p)$ (modulo p) durch die Entwicklungscoefficienten der Function $\frac{\sin x + \sin 3x}{\cos 5x}$ bestimmt.

Ist zweitens p eine Primzahl von der Form $4n+1$, so hat man nach (1)

$$h(pq) \equiv (-1)^{\frac{p-1}{4}} \left| 2 \sum_0^{\frac{q}{2}} {}_i \left(\frac{i}{q}\right) \sum_0^{\frac{1}{2}p} {}_k \cos(i + qk)x \right| \pmod{p}.$$

Mit Benutzung der bekannten Gleichung

$$\text{(C)} \qquad 2 \sum_0^m {}_k \cos(a + bk) = \frac{\sin\left(a + \left(m + \frac{1}{2}\right)b\right) - \sin\left(a - \frac{1}{2}b\right)}{\sin \frac{1}{2} b}$$

$$= 2 \frac{\sin \frac{m+1}{2} b}{\sin \frac{1}{2} b} \cos\left(a + \frac{m}{2} b\right)$$

findet man nun, dass bis zu den Gliedern der Ordnung $p-1$

$$2 \sum_0^{\frac{1}{2}p} {}_k \cos(i + qk)x \equiv \frac{\cos\left(i - \frac{1}{4}q\right)x}{\cos \frac{1}{4} qx}$$

ist. Hieraus schliesst man weiter

$$h(pq) \equiv (-1)^{\frac{p-1}{4}} \left| \frac{1}{\cos qx} \sum_0^{\frac{q}{2}} {}_i \left(\frac{4i}{q}\right) \cos(4i - q)x \right| \pmod{p},$$

und da

$$\sum_{0}^{\frac{1}{2}q} {}_i \left(\frac{4i}{q}\right) \cos(4i-q)x = -\sum_{0}^{\frac{1}{4}q} {}_i \left(\frac{q-4i}{q}\right) \cos(q-4i)x$$
$$+ \sum_{\frac{1}{4}q}^{\frac{1}{2}q} {}_i \left(\frac{4i-q}{q}\right) \cos(4i-q)x$$

ist, so enthält die vorstehende Congruenz den Satz:

II. *Es sei* $q \equiv 3$ *(mod. 4) eine durch kein Quadrat theilbare positive Zahl grösser als* 1.

Ferner sei

$$\varphi(x) = \frac{1}{\cos qx}\left[\left(\frac{1}{q}\right)\cos x - \left(\frac{3}{q}\right)\cos 3x + \left(\frac{5}{q}\right)\cos 5x - + \dots\right.$$
$$\left. + \left(\frac{q-2}{q}\right)\cos(q-2)x\right]$$

und die Entwicklung dieser Function nach Potenzen von x *laute*

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 \frac{x^2}{\underline{|2}} + c_2 \frac{x^4}{\underline{|4}} + \dots + c_n \frac{x^{2n}}{\underline{|2n}} + \dots.$$

Bezeichnet dann $p \equiv 1$ *(mod. 4) eine in* q *nicht aufgehende Primzahl, so ist*

$$h(pq) \equiv (-1)^{\frac{p-1}{4}} c_{\frac{p-1}{4}} \text{ (mod. } p).$$

Für den einfachsten Fall $q = 3$ kann man diesem Satze, da $h(3p)$ stets kleiner als p ist, die bestimmtere Fassung geben:

Ist p *eine Primzahl von der Form* $4n+1$, *ist ferner*

$$\frac{\cos x}{\cos 3x} = c_0 + c_1 \frac{x^2}{\underline{|2}} + \dots + c_n \frac{x^{2n}}{\underline{|2n}} + \dots,$$

so stimmt die Classenzahl $h(3p)$ *mit dem kleinsten positiven Rest von* $(-1)^{\frac{p-1}{4}} c_{\frac{p-1}{4}}$ *(mod.* p*) überein.*

6.

Wenn $P \equiv 1 \pmod{4}$ ist und P in zwei Factoren p und q zerlegt wird, so findet man

$$h(pq) = 2\sum_{0}^{q}{}_{i}\left(\frac{i}{q}\right)\sum{}_{k}\left(\frac{i+qk}{p}\right),$$

wo die innere Summation über alle ganzen Zahlen k zu erstrecken ist, für welche $i+qk$ zwischen 0 und $\frac{1}{4}pq$ liegt, also über alle ganzen Zahlen k, die zwischen $-\frac{i}{q}$ und $\frac{1}{4}p-\frac{i}{q}$ liegen.

Ich trenne jetzt die Fälle $p \equiv q \equiv 1 \pmod{4}$ und $p \equiv q \equiv 3 \pmod{4}$.

Im ersten Falle muss k die Werthe $0, 1, \ldots, \frac{p-1}{4}$ oder $0, 1, \ldots, \frac{p-1}{4}-1$ durchlaufen, je nachdem $i < \frac{q}{4}$ oder $i > \frac{q}{4}$ ist. Daher kommt

$$h(pq) = 2\sum_{0}^{\frac{1}{4}q}{}_{i}\left(\frac{i}{q}\right)\sum_{0}^{\frac{1}{4}p}{}_{k}\left(\frac{i+qk}{p}\right) + 2\sum_{\frac{1}{4}q}^{q}{}_{i}\left(\frac{i}{q}\right)\sum_{0}^{\frac{1}{4}p-1}{}_{k}\left(\frac{i+qk}{p}\right).$$

Ersetzt man in denjenigen Theilen der Summe, in welchen $i > \frac{q}{2}$ ist, i durch $q-i$, so erhält man nach leichten Umformungen:

$$\text{(1)}\qquad h(pq) = 2\sum_{0}^{\frac{1}{4}q}{}_{i}\left(\frac{i}{q}\right)\sum_{-\frac{1}{4}p}^{\frac{1}{4}p}{}_{k}\left(\frac{i+qk}{p}\right) + 2\sum_{\frac{1}{4}q}^{\frac{1}{2}q}{}_{i}\left(\frac{i}{q}\right)\sum_{-\frac{1}{4}p}^{\frac{1}{4}p-1}{}_{k}\left(\frac{i+qk}{p}\right),$$

$$(p \equiv q \equiv 1 \pmod{4}).$$

Im zweiten Falle findet man in ähnlicher Weise:

$$\text{(2)}\qquad h(pq) = 2\sum_{0}^{\frac{1}{4}q}{}_{i}\left(\frac{i}{q}\right)\sum_{-\frac{1}{4}p}^{\frac{1}{4}p}{}_{k}\left(\frac{i+qk}{p}\right) + 2\sum_{\frac{1}{4}q}^{\frac{1}{2}q}{}_{i}\left(\frac{i}{q}\right)\sum_{-\frac{1}{4}p-1}^{\frac{1}{4}p}{}_{k}\left(\frac{i+qk}{p}\right),$$

$$(p \equiv q \equiv 3 \pmod{4}).$$

Unter der Voraussetzung, dass p eine Primzahl ist, findet im ersten Falle die Congruenz

$$(1') \qquad h(pq) \equiv (-1)^{\frac{p-1}{4}} \left\{ 2\sum_{0}^{\frac{1}{4}q}{}_{i} \left(\frac{i}{q}\right) \sum_{-\frac{1}{4}p}^{\frac{1}{4}p}{}_{k} \cos(i+qk)x \right.$$

$$\left. + 2\sum_{\frac{1}{4}q}^{\frac{1}{2}q}{}_{i} \left(\frac{i}{q}\right) \sum_{-\frac{1}{4}p}^{\frac{1}{4}p-1}{}_{k} \cos(i+qk)x \right\} \pmod{p}$$

im zweiten Falle die Congruenz

$$(2') \qquad h(pq) \equiv (-1)^{\frac{p-1}{4}} \left\{ 2\sum_{0}^{\frac{1}{4}q}{}_{i} \left(\frac{i}{q}\right) \sum_{-\frac{1}{4}p}^{\frac{1}{4}p}{}_{k} \sin(i+qk)x \right.$$

$$\left. + 2\sum_{\frac{1}{4}q}^{\frac{1}{2}q}{}_{i} \left(\frac{i}{q}\right) \sum_{-\frac{1}{4}p-1}^{\frac{1}{4}p}{}_{k} \sin(i+qk)x \right\} \pmod{p}$$

statt. Dabei bedeutet die geschwungene Klammer, wie oben, den Coefficienten von $\dfrac{x^{\frac{p-1}{2}}}{\left|\underline{\frac{p-1}{2}}\right.}$ in der Entwicklung der eingeklammerten Function.

Diese Congruenzen lassen sich mit Hülfe der Formeln (S) und (C) der vorigen Nummer und der Sätze von N° 2 in die folgenden einfacheren Congruenzen überführen:

$$h(pq) \equiv (-1)^{\frac{p-1}{4}} \left\{ \frac{1}{\cos qx} \sum_{0}^{\frac{1}{4}q}{}_{i} \left(\frac{4i}{q}\right) \cos 4ix \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\cos qx} \sum_{\frac{1}{4}q}^{\frac{1}{2}q}{}_{i} \left(\frac{2q-4i}{q}\right) \cos(2q-4i)x \right\} \pmod{p}$$

bezüglich

$$h(pq) \equiv (-1)^{\frac{p-3}{4}} \left\{ -\frac{1}{\cos qx} \sum_{0}^{\frac{1}{4}q} {}_i \left(\frac{4i}{q}\right) \sin 4ix \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\cos qx} \sum_{\frac{1}{4}q}^{\frac{1}{2}q} {}_i \left(\frac{2q-4i}{q}\right) \sin(2q-4i)x \right\} \pmod{p}.$$

Diese Congruenzen enthalten nun folgende Sätze, die sich den Sätzen I. und II. der vorigen Nummer an die Seite stellen:

III. *Es sei* $q \equiv 1 \pmod{4}$ *eine durch kein Quadrat ausser* 1 *theilbare positive Zahl grösser als* 1. *Ferner sei*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\cos qx}\left[-\left(\frac{2}{q}\right)\cos 2x + \left(\frac{4}{q}\right)\cos 4x - \left(\frac{6}{q}\right)\cos 6x + - \dots \right.$$

$$\left. + \left(\frac{q-1}{q}\right)\cos(q-1)x\right]$$

und die Entwicklung dieser Function nach Potenzen von x laute

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 \frac{x^2}{\underline{|2}} + \dots + c_n \frac{x^{2n}}{\underline{|2n}} + \dots.$$

Bezeichnet dann $p \equiv 1 \pmod{4}$ *eine in q nicht aufgehende Primzahl, so ist*

$$h(pq) \equiv (-1)^{\frac{p-1}{4}} c_{\frac{p-1}{4}} \pmod{p}.$$

IV. *Es sei* $q \equiv 3 \pmod{4}$ *eine durch kein Quadrat ausser* 1 *theilbare positive Zahl grösser als* 1. *Ferner sei*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\cos qx}\left[\left(\frac{2}{q}\right)\sin 2x - \left(\frac{4}{q}\right)\sin 4x + \left(\frac{6}{q}\right)\sin 6x - + \dots \right.$$

$$\left. + \left(\frac{q-1}{q}\right)\sin(q-1)x\right]$$

und die Entwicklung dieser Function nach Potenzen von x laute:

$$\varphi(x) = c_1 x + c_2 \frac{x^3}{\underline{|3}} + \dots + c_n \frac{x^{2n-1}}{\underline{|2n-1}} + \dots.$$

Bezeichnet dann $p \equiv 3$ (*mod.* 4) *eine in* q *nicht aufgehende Primzahl, so ist*

$$h(pq) \equiv (-1)^{\frac{p-3}{4}} \cdot c_{\frac{p+1}{4}} \pmod{p}.$$

In dem besonderen Falle $q = 3$ hat man den bestimmteren Satz, dass — unter p eine von 3 verschiedene Primzahl der Form $4n + 3$ verstanden — die Classenzahl $h(3p)$ gleich ist dem kleinsten positiven Reste von $(-1)^{\frac{p+1}{4}} c_{\frac{p+1}{4}} \pmod{p}$, wenn c_n den Coefficienten von $\frac{x^{2n-1}}{\lfloor 2n-1}$ in der Potenzentwicklung von $\frac{\sin 2x}{\cos 3x}$ bezeichnet.

7.

Analoge Sätze, wie sie für die Classenzahl $h(pq)$ in den letzten beiden Nummern aufgestellt sind, bestehen für die Classenzahl $h(2pq)$. Ich gebe diese Sätze hier an, gehe jedoch auf ihre Beweise nicht ein, da die letzteren ziemlich umständlich sind, ohne gegenüber den Beweisen der Sätze in N° 5 und 6 neue Momente darzubieten. Die Sätze lauten folgendermassen:

V. *Es sei* $q \equiv 1$ (*mod.* 4) *eine durch kein Quadrat ausser* 1 *theilbare positive Zahl grösser als* 1. *Ferner sei*

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\cos 2qx}\left[\left(\frac{1}{q}\right)\cos x - \left(\frac{3}{q}\right)\cos 3x - \left(\frac{5}{q}\right)\cos 5x + \left(\frac{7}{q}\right)\cos 7x + \dots \right.$$
$$\left. + \left(\frac{2q-1}{q}\right)\cos(2q-1)x\right]$$

und

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{\cos 2qx}\left[\left(\frac{1}{q}\right)\sin x + \left(\frac{3}{q}\right)\sin 3x - \left(\frac{5}{q}\right)\sin 5x - \left(\frac{7}{q}\right)\sin 7x + \dots \right.$$
$$\left. + \left(\frac{2q-1}{q}\right)\sin(2q-1)x\right].$$

Der Coefficient von $\frac{x^{2n}}{\underline{|2n}}$ *in der Potenzentwicklung von* $\varphi_1(x)$ *werde mit* c_n, *der Coefficient von* $\frac{x^{2n-1}}{\underline{|2n-1}}$ *in der Entwicklung von* $\varphi_2(x)$ *mit* d_n *bezeichnet.*

Ist dann p *eine nicht in* q *aufgehende Primzahl, so besteht die Congruenz*

$$h(2pq) \equiv (-1)^{\frac{p-1}{4}} c_{\frac{p-1}{4}} \pmod{p}$$

oder die Congruenz

$$h(2pq) \equiv (-1)^{\frac{p+1}{4}} d_{\frac{p+1}{4}} \pmod{p},$$

je nachdem $p \equiv 1$ *oder* $\equiv 3$ *(mod. 4) ist.*

VI. *Es sei* $q \equiv 3$ *(mod. 4) eine durch kein Quadrat ausser* 1 *theilbare positive Zahl grösser als* 1. *Ferner sei*

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\cos 2qx}\left[\left(\frac{1}{q}\right)\cos x + \left(\frac{3}{q}\right)\cos 3x - \left(\frac{5}{q}\right)\cos 5x - \left(\frac{7}{q}\right)\cos 7x + \dots \right.$$
$$\left. - \left(\frac{2q-1}{q}\right)\cos(2q-1)x\right],$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{\cos 2qx}\left[\left(\frac{1}{q}\right)\sin x - \left(\frac{3}{q}\right)\sin 3x - \left(\frac{5}{q}\right)\sin 5x + \left(\frac{7}{q}\right)\sin 7x + \dots \right.$$
$$\left. - \left(\frac{2q-1}{q}\right)\sin(2q-1)x\right]$$

und die Coefficienten von $\frac{x^{2n}}{\underline{|2n}}$ *bez.* $\frac{x^{2n-1}}{\underline{|2n-1}}$ *in den Potenzentwicklungen von* $\varphi_1(x)$ *bez.* $\varphi_2(x)$ *mögen mit* c_n *bez.* d_n *bezeichnet werden.*

Ist dann p *eine nicht in* q *aufgehende Primzahl, so besteht die Congruenz*

$$h(2pq) \equiv (-1)^{\frac{p-1}{4}} c_{\frac{p-1}{4}} \pmod{p}$$

oder die Congruenz

$$h(2pq) \equiv (-1)^{\frac{p+1}{4}} d_{\frac{p+1}{4}} \pmod{p},$$

je nachdem $p \equiv 1$ *oder* $\equiv 3$ *(mod. 4) ist.*

In dem besondern Falle $q = 3$ wird $\varphi_1(x) = \frac{\cos x + \cos 5x}{\cos 6x}$ und $\varphi_2(x) = \frac{\sin x + \sin 5x}{\cos 6x}$ und durch die Congruenzen des Satzes VI sind die Classenzahlen $h(6p)$ vollkommen bestimmt, da sie die Zahl p nicht überschreiten können.

8.

Die vorstehend entwickelten Sätze gestatten eine Ergänzung dadurch, dass man das Verhalten der Classenzahlen in Bezug auf die Potenzen von 2 als Moduln in Rücksicht zieht. Die Theorie der Genera lehrt in dieser Hinsicht Folgendes.[1] Wenn λ die Zahl der Primfactoren bezeichnet, aus denen sich P zusammensetzt, so ist $h(P)$ durch $2^{\lambda-1}$ oder 2^{λ} theilbar, je nachdem $P \equiv 3$ oder $\equiv 1 \pmod{4}$ ist, während $h(2P)$ stets durch 2^{λ} theilbar ist. Bedeutet nämlich $h_g(P)$ die Anzahl der Classen eigentlich primitiver positiver Formen der Determinante $-P$, die in dem einzelnen Genus enthalten sind, so ist bekanntlich

$$h_g(P) = \frac{1}{2^{\lambda-1}} h(P), \quad \text{wenn } P \equiv 3 \pmod{4},$$

$$h_g(P) = \frac{1}{2^{\lambda}} h(P), \quad \text{wenn } P \equiv 1 \pmod{4},$$

$$h_g(2P) = \frac{1}{2^{\lambda}} h(2P).$$

Man kann aber hierüber hinaus in den Fällen $\lambda = 1$ und $\lambda = 2$ in einfacher Weise entscheiden, ob $h_g(P)$ bez. $h_g(2P)$ congruent 0 oder 1 (mod. 2) ist, ob also das einzelne Genus eine gerade oder ungerade Anzahl von Classen umfasst.

Wenn zunächst $\lambda = 1$, also $P = p$ eine Primzahl ist, so bestehen die folgenden Congruenzen:

---

[1] Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie.* (Supplement IV.)

$$h_g(p) \;\; = h(p) \equiv 1 \pmod{2}, \qquad \text{wenn } p \equiv 3 \pmod{4},$$[1]

$$h_g(p) \;\; = \frac{1}{2} h(p) \equiv \frac{p-1}{2} \pmod{2}, \quad \text{wenn } p \equiv 1 \pmod{4},$$

$$h_g(2p) = \frac{1}{2} h(2p) \equiv \frac{p^2-1}{8} \pmod{2}.$$

Wenn $\lambda = 2$, also $P = pq$ ist, wo p und q zwei von einander verschiedene ungerade Primzahlen sind, so hängt der Rest von $h_g(P)$ resp. $h_g(2P)$ (mod. 2) einerseits von dem Werthe des Legendre'schen Zeichens $\left(\frac{p}{q}\right)$, andererseits von den Resten der Zahlen p und q (mod. 8) ab. In jedem einzelnen Falle lehren die folgenden beiden Tabellen, ob $h_g(pq)$ bez. $h_g(2pq)$ eine gerade oder ungerade Zahl ist. In den Tabellen bedeutet ε die Abkürzung für $\frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{p}{q}\right)\right)$, es ist also

$$\varepsilon = 0 \quad \text{oder} \quad \varepsilon = 1,$$

je nachdem p quadratischer Rest oder quadratischer Nichtrest von q ist.

Tabelle für die Reste von $h_g(pq)$ nach dem Modul 2.

	$q \equiv 1$	$q \equiv 3$	$q \equiv 5$	$q \equiv 7$
$p \equiv 1$	0	ε	ε	ε
$p \equiv 3$	ε	1	ε	ε
$p \equiv 5$	ε	ε	0	ε
$p \equiv 7$	ε	$1 - \varepsilon$	ε	0

Die Einrichtung der Tabelle ist diese: In dem einzelnen Felde der Tabelle findet sich der Rest von $h_g(pq)$ (mod. 2), so oft p und q nach

[1] Nach dem Modul 4 ist $h(p) \equiv \frac{p-1}{2}$ od. $\frac{p+3}{2}$, je nachdem $\left|\frac{p-1}{2}\right| \equiv +1$ oder -1 (mod. p) ist. Vgl. Jacobi, *Observatio arithmetica de numero classium divisorum* etc., Crelles Journal, Bd. 9 oder Werke, Bd. 6 pag. 240.

dem Modul 8 die Congruenzen befriedigen, welche die in dem Felde sich kreuzenden Horizontal- bez. Verticalreihen characterisiren. Beispielsweise ist $h_g(pq) \equiv \varepsilon$ (mod. 2) falls $p \equiv 3$ und $q \equiv 5$ (mod. 8) ist. Die Anzahl der im einzelnen Genus enthaltenen Classen ist dann also gerade oder ungerade, je nachdem p Rest oder Nichtrest von q ist.

In der gleichen Weise ist die folgende Tabelle eingerichtet:

Tabelle für die Reste von $h_g(2pq) = \frac{1}{4}h(2pq)$ nach dem Modul 2.

	$q \equiv 1$	$q \equiv 3$	$q \equiv 5$	$q \equiv 7$
$p \equiv 1$	0	ε	ε	0
$p \equiv 3$	ε	0	1	ε
$p \equiv 5$	ε	1	1	ε
$p \equiv 7$	0	$1 - \varepsilon$	ε	0

Was die Beweise dieser auf die Zahlen h_g bezüglichen Sätze angeht, so möge es genügen, einen besonderen Fall zu betrachten, bei welchem das Princip der Beweise klar hervortritt.

Es sei $P = pq \equiv 1$ (mod. 4) das Produkt zweier Primzahlen; dann ist

$$h_g = h_g(2pq) = \frac{1}{4}h(2pq) = \frac{1}{2}\left\{\sum_0^{\frac{1}{8}pq}\left(\frac{s}{pq}\right) + \sum_0^{\frac{3}{8}pq}\left(\frac{s}{pq}\right)\right\}.$$

Wenn nun die Anzahl der Jacobi'schen Zeichen $\left(\frac{s}{pq}\right)$, die den Werth $+1$ bezüglich -1 besitzen, in der ersten Summe mit A bezüglich B, in der zweiten Summe mit A' bezüglich B' bezeichnet wird, so ist

$$h_g = \frac{1}{2}(A - B + A' - B') = \frac{1}{2}(A + B) + \frac{1}{2}(A' + B') - (B + B').$$

Die Zahlen $A + B$ und $A' + B'$ geben an, wie viele Zahlen s zwischen

o und $\frac{1}{8}pq$ bez. zwischen o und $\frac{3}{8}pq$ liegen, die weder durch p noch durch q theilbar sind. Daher ist

$$A + B = \left[\frac{pq}{8}\right] - \left[\frac{p}{8}\right] - \left[\frac{q}{8}\right],$$

$$A' + B' = \left[\frac{3pq}{8}\right] - \left[\frac{3p}{8}\right] - \left[\frac{3q}{8}\right],$$

wenn allgemein $[x]$ die grösste in x enthaltene ganze Zahl bezeichnet. Um den Rest von h_g (mod 2) zu bestimmen, ist es hiernach nur noch erforderlich, festzustellen, ob $B + B'$ gerade oder ungerade ist.

Zu dem Ende betrachte ich das Produkt

$$\Pi = \prod\left(\frac{s_1}{pq}\right)\prod\left(\frac{s_2}{pq}\right),$$

wo s_1 bez. s_2 alle zu pq theilerfremden Zahlen durchläuft, die zwischen o und $\frac{1}{8}pq$ bez. o und $\frac{3}{8}pq$ liegen. Offenbar ist $\Pi = (-1)^{B+B'}$ und daher $B + B'$ gerade oder ungerade, je nachdem $\Pi = +1$ oder -1 ist. Das Produkt Π zerfällt nun in die beiden Produkte

$$\Pi_p = \prod\left(\frac{s_1}{p}\right)\prod\left(\frac{s_2}{p}\right),$$

$$\Pi_q = \prod\left(\frac{s_1}{q}\right)\prod\left(\frac{s_2}{q}\right).$$

Die Zahlen s_1 zusammen mit den zwischen o und $\frac{1}{8}pq$ liegenden und durch q theilbaren Zahlen

$$q, 2q, \ldots, a_1 q, \qquad \left(a_1 = \left[\frac{p}{8}\right]\right)$$

lassen sich in folgender Weise anordnen:

$$\begin{array}{cccc} 1, & 2, & \ldots, & p-1, \\ p+1, & p+2, & \ldots, & 2p-1, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ kp+1, & kp+2, & \ldots, & kp+a_2, \end{array}$$

wo $k = \left[\frac{q}{8}\right]$ und $a_2 = \left[\frac{pq}{8}\right] - p\left[\frac{q}{8}\right]$ ist. Nach dem Wilson'schen Lehrsatz wird daher

$$\prod\left(\frac{s_1}{p}\right)\prod_{r=1}^{a_1}\left(\frac{rq}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)^{\left[\frac{q}{8}\right]}\left(\frac{|a_2}{p}\right).$$

oder

$$\prod\left(\frac{s_1}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)^{\left[\frac{q}{8}\right]}\left(\frac{q}{p}\right)^{\left[\frac{p}{8}\right]}\left(\frac{|a_1}{p}\right)\left(\frac{|a_2}{p}\right).$$

In analoger Weise lässt sich $\prod\left(\frac{s_2}{p}\right)$ umformen, und so findet man schliesslich

$$H_p = \left(\frac{-1}{p}\right)^{\left[\frac{q}{8}\right]+\left[\frac{3q}{8}\right]}\left(\frac{q}{p}\right)^{\left[\frac{p}{8}\right]+\left[\frac{3p}{8}\right]}\left(\frac{|a_1\,|a_2\,|a_3\,|a_4}{p}\right)$$

wo a_1, a_2, a_3, a_4 die folgende Bedeutung haben

$$a_1 = \left[\frac{p}{8}\right], \qquad a_2 = \left[\frac{pq}{8}\right] - p\left[\frac{q}{8}\right], \qquad a_3 = \left[\frac{3p}{8}\right], \qquad a_4 = \left[\frac{3pq}{8}\right] - p\left[\frac{3q}{8}\right].$$

Wenn nun $q \equiv 1$ oder $3 \pmod{8}$, so ergiebt sich leicht, dass $a_2 = a_1$, $a_4 = a_3$ oder $a_2 = a_3$, $a_4 = a_1$ und daher $\left(\frac{|a_1\,|a_2\,|a_3\,|a_4}{p}\right) = +1$ ist. Dasselbe Legendre'sche Zeichen hat dagegen den Werth $\left(\frac{-1}{p}\right)^{\left[\frac{p}{8}\right]+\left[\frac{3p}{8}\right]}$, wenn $q \equiv 5$ oder $7 \pmod{8}$ ist. Denn in diesen Fällen ist $a_2 = \left[\frac{5p}{8}\right]$, $a_4 = \left[\frac{7p}{8}\right]$ oder $a_2 = \left[\frac{7p}{8}\right]$, $a_4 = \left[\frac{5p}{8}\right]$.

Aus dem Wilson'schen Satze folgt aber, dass

$$\left|\left[\frac{p}{8}\right]\right.\left|\left[\frac{7p}{8}\right]\right. \equiv (-1)^{\left[\frac{p}{8}\right]} \quad \text{und} \quad \left|\left[\frac{3p}{8}\right]\right.\left|\left[\frac{5p}{8}\right]\right. \equiv (-1)^{\left[\frac{3p}{8}\right]} \pmod{p} \text{ ist.}$$

Zusammenfassend kann man sagen, dass

$$H_p = \left(\frac{-1}{p}\right)^{\left[\frac{q}{8}\right]+\left[\frac{3q}{8}\right]}\left(\frac{\pm q}{p}\right)^{\left[\frac{p}{8}\right]+\left[\frac{3p}{8}\right]}$$

ist, wo das doppelte Vorzeichen nach der Massgabe zu bestimmen ist, dass $\pm q \equiv 1$ oder 3 (mod. 8) wird. In entsprechender Weise hat man natürlich

$$H_q = \left(\frac{-1}{q}\right)^{\left[\frac{p}{8}\right]+\left[\frac{3p}{8}\right]} \left(\frac{\pm p}{q}\right)^{\left[\frac{q}{8}\right]+\left[\frac{3q}{8}\right]},$$

wo das doppelte Vorzeichen wieder durch die Forderung $\pm p \equiv 1$ oder 3 (mod. 8) zu bestimmen ist.

Hiernach kann man für den Fall $pq \equiv 1$ (mod. 4) den Rest von $h_g(2pq)$ (mod. 2) leicht feststellen, wenn die Reste von p und q (mod. 8) sowie das Vorzeichen $\left(\frac{p}{q}\right)$ bekannt sind. Unterscheidet man je nach den Resten von p und q (mod. 8) einzelne Unterfälle, so ergeben sich die in der zweiten Tabelle auf die Fälle $p \equiv 1, 5$; $q \equiv 1, 5$ und $p \equiv 3, 7$; $q \equiv 3, 7$ (mod. 8) bezüglichen Angaben.

9.

Mit Hilfe der Sätze von N° 8 lassen sich die Resultate der früheren Nummern noch ein wenig erweitern, wie ich nun noch an einigen Beispielen zeigen will.

Wenn die Zahlen $c_1, c_2, \ldots$ durch die Gleichung

$$\text{(1)} \qquad \frac{\sin x + \sin 3x}{\cos 5x} = c_1 x + c_2 \frac{x^3}{3} + \ldots + c_n \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$$

erklärt werden, so findet nach Satz I in N° 5 die Congruenz statt

$$\text{(2)} \qquad h(5p) \equiv (-1)^{\frac{p+1}{4}} c_{\frac{p+1}{4}} \pmod{p},$$

unter p eine Primzahl von der Form $4n+3$ verstanden.

Nun ist einerseits $h(5p)$ durch 2 theilbar $\left(h_g(5p) = \frac{1}{2} h(5p)\right)$; andererseits ist

$$\frac{\sin x + \sin 3x}{\cos 5x} \equiv \frac{\sin x + \sin(-x)}{\cos 5x} \equiv 0 \pmod{4},$$

d. h. die Coefficienten $c_1, c_2, \ldots$ sind sämmtlich durch 4 theilbar. Daher kann die Congruenz (2) durch die folgende ersetzt werden:

$$(2') \qquad h(5p) \equiv (-1)^{\frac{p+1}{4}} c_{\frac{p+1}{4}} \pmod{2p}.$$

Da nun weiter die Anzahl der Jacobi'schen Zeichen, aus denen sich $h(5p)$ zusammensetzt, $\left[\frac{5p}{2}\right] - \left[\frac{p}{2}\right] - \left[\frac{5}{2}\right] = 2p - 2$ beträgt, also $h(5p) < 2p$ ist, so folgt, dass $h(5p)$ *der kleinste positive Rest von* $(-1)^{\frac{p+1}{4}} c_{\frac{p+1}{4}} \pmod{2p}$ *ist.* Die Congruenz (2') kann ihrerseits durch eine Congruenz nach dem Modul $4p$ ersetzt werden. Nach der ersten Tabelle der vorigen Nummer ist nämlich $h(5p) \equiv 1 - \left(\frac{p}{5}\right) \pmod{4}$, also $h(5p) \equiv 0$ oder $2 \pmod{4}$, je nachdem $p \equiv \pm 1$ oder $\pm 2 \pmod{5}$ ist. Hiernach leuchtet ein, dass

$$(2'') \qquad h(5p) \equiv (-1)^{\frac{p+1}{4}} c_{\frac{p+1}{4}} \pmod{4p}, \qquad \text{für } p \equiv \pm 1 \pmod{5},$$

$$(2''') \qquad h(5p) \equiv (-1)^{\frac{p+1}{4}} c_{\frac{p+1}{4}} + 2p \pmod{4p}, \qquad \text{für } p \equiv \pm 2 \pmod{5}$$

ist. Ähnliche Resultate knüpfen sich an die Sätze III in N° 6 und V und VI in N° 7, so dass man beispielsweise die Classenzahlen $h(5p)$ und $h(10p)$ in folgender Weise durch Entwicklungscoefficienten bestimmen kann:

Es seien die Zahlen c, d, e, f durch folgende Gleichungen erklärt:

$$\frac{\sin x + \sin 3x}{\cos 5x} = \sum_1^\infty {}_n\, c_n \frac{x^{2n-1}}{\lfloor 2n-1},$$

$$\frac{\cos 2x + \cos 4x}{\cos 5x} = \sum_0^\infty {}_n\, d_n \frac{x^{2n}}{\lfloor 2n},$$

$$\frac{\sin x - \sin 3x + \sin 7x + \sin 9x}{\cos 10x} = \sum_1^\infty {}_n\, e_n \frac{x^{2n-1}}{\lfloor 2n-1},$$

$$\frac{\cos x + \cos 3x - \cos 7x + \cos 9x}{\cos 10x} = \sum_0^\infty {}_n\, f_n \frac{x^{2n}}{\lfloor 2n}.$$

Dann ist die Classenzahl $h(5p)$ der kleinste positive nach dem Modul $2p$ genommene Rest von $(-1)^{\frac{p+1}{4}} c_{\frac{p+1}{4}}$ oder $(-1)^{\frac{p-1}{4}} d_{\frac{p-1}{4}}$, je nachdem $p \equiv 3$ oder $\equiv 1 \pmod{4}$ ist; die Classenzahl $h(10p)$ stimmt überein mit dem kleinsten positiven nach dem Modul $2p$ genommenen Rest von $(-1)^{\frac{p+1}{4}} e_{\frac{p+1}{4}}$ oder $(-1)^{\frac{p-1}{4}} f_{\frac{p-1}{4}}$, je nachdem $p \equiv 3$ oder $\equiv 1 \pmod{4}$ ist.

Unter p ist dabei irgend eine von 5 verschiedene ungerade Primzahl zu verstehen.

ÜBER DIE STRUCTUR DER DISCRIMINANTEN UND RESULTANTEN VON BINÄREN FORMEN[1]

VON

FRANZ MEYER
in CLAUSTHAL.

1. Bricht man eine, nach steigenden Potenzen der Variabeln λ geordnete binäre Form:

$$(1) \quad f_m(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_{k-1}\lambda^{k-1} + a_k\lambda^k + a_{k+1}\lambda^{k+1} + \ldots + a_m\lambda^m$$

hinter der k^{ten} Potenz von λ ab, so möge die so entstehende Form:

$$(2) \qquad \varphi_k(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_k\lambda^k$$

als die »k^{te} Theilform» von f bezeichnet werden, und entsprechend der nach Heraushebung des Factors λ^k verbleibende Rest:

$$(3) \qquad \psi_{m-k}(\lambda) = a_k + a_{k+1}\lambda^1 + \ldots + a_m\lambda^{m-k}$$

als »zugehörige Nebentheilform».

Gewisse Gründe sprechen dann dafür, dass in den Ausdruck für die Discriminante von f die Discriminanten sämmtlicher Theilformen (2), (3) als Bestandtheile eingehen werden.

Die hiermit aufgeworfene Frage soll im Folgenden ihre Erledigung in bejahendem Sinne finden: ein analoges Resultat wird sich dann auch für die Resultante von zwei Binärformen angeben lassen.

---

[1] Vgl. die vorläufigen Mittheilungen in den Göttinger Nachrichten 1895, N° 1 und 2.

Für zahlentheoretische Anwendungen dieser Ergebnisse hat man noch die Discriminante einer binären Form vermöge eines geeigneten Zahlenfactors zu »normiren».

Dabei wird sich zugleich die Frage beantworten lassen, was man überhaupt in der Zahlentheorie unter der Discriminante einer, ohne Binomialcoefficienten geschriebenen Binärform (1) zu verstehen hat.

2. In der Formentheorie legt man den Coefficienten $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m$ von (1) Gewichte bei von den Werthen $m, m-1, \ldots, 1, 0$; dadurch wird die Discriminante von (1), eine homogene Form der a von der Ordnung $2(m-1)$, zugleich isobar d. i. alle Glieder der Discriminante erhalten das nämliche Gewicht $m(m-1)$.

Für unsern Zweck wird es sich indessen empfehlen, den k ersten Coefficienten in (1) resp. die Gewichte $k, k-1, \ldots, 2, 1$ beizulegen, allen übrigen aber das Gewicht Null.

Dann werden die einzelnen Glieder der Discriminante von (1) nicht alle das gleiche Gewicht besitzen, und es besteht die Vermuthung, dass gerade dem Aggregat der Glieder vom kleinsten Gewichte eine besonders einfache Eigenschaft zukommen wird.

Um zu dem gemeinten Aggregate zu gelangen, setze man in bekannter Weise:[1]

$$(4) \qquad a_0 = \varepsilon^k a'_0, \qquad a_1 = \varepsilon^{k-1} a'_1, \; \ldots, \; a_{k-1} = \varepsilon a'_{k-1}, \qquad a_k = a'_k,$$

entwickele die Discriminante nach steigenden Potenzen von ε, und ermittele den Coefficienten C der kleinsten Potenz von ε. Eben dies Product aus C und der kleinsten Potenz von ε liefert, wenn man von den a' wiederum zu den a zurückkehrt, das gewünschte Aggregat vom kleinsten Gewichte innerhalb der Discriminante.

3. Um den Coefficienten C bequem zu berechnen, bedienen wir uns der Wurzeln von f (1). Zu dem Behuf schicken wir folgenden Hülfssatz voraus:

Vermöge der Substitution (4) *zerfallen die* m *Wurzeln von* f (1), *als*

---

[1] Die Buchstaben a' in (4), wie die α und β in (5) und (6) bedeuten Grössen, die nicht zugleich mit ε verschwinden.

Functionen von ε betrachtet, in zwei Klassen; die erste umfasst k Wurzeln von der Form:

$$(5) \qquad \varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^d\beta_1\,, \ldots, \varepsilon\alpha_k + \varepsilon^d\beta_k, \qquad (d > 1),$$ [1]

die zweite die $m - k$ übrigen von der Form:

$$(6) \qquad \alpha_{k+1} + \varepsilon^e\beta_{k+1}\,, \ldots, \alpha_m + \varepsilon^e\beta_m \qquad (e > 0).$$ [1]

Hierbei sind die Grössen $\varepsilon\alpha$ in (5) die Wurzeln von φ_k (2), und die Grössen α in (6) die Wurzeln von ψ_{m-k} (3).

Dass die Wurzeln von f die äussere Gestalt (5), (6) vermöge (4) erhalten, bedarf keines weiteren Beweises; auch, dass die $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_m$ in (6) die Wurzeln von ψ_{m-k} (3) sind, ergiebt sich fast unmittelbar, wenn man ε zu Null werden lässt, wodurch ja f_m in $\lambda^k\psi_{m-k}$ übergehen würde.

Es handelt sich also nur noch um den Nachweis, dass die $\varepsilon\alpha_1, \ldots, \varepsilon\alpha_k$ in (5) die Wurzeln von φ_k (2) sind.

Wir betrachten zu dem Ende die Quotienten $\frac{a_0}{a_k}, \frac{a_1}{a_k}, \ldots, \frac{a_{k-1}}{a_k}$. Mit Rücksicht auf (4), (5), (6) und die eben erledigte Bedeutung der α in (6) hat man zunächst:

$$(-1)^k\frac{a_0}{a_k} = \frac{(-1)^m\frac{\varepsilon^k a_0'}{a_m}}{(-1)^{m-k}\frac{a_k}{a_m}} = \frac{(\varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^d\beta_1)\ldots(\varepsilon\alpha_k + \varepsilon^d\beta_k)(\alpha_{k+1} + \varepsilon^e\beta_{k+1})\ldots(\alpha_m + \varepsilon^e\beta_m)}{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_m}$$

$$= \varepsilon^k(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k) + \ldots$$

wo die zuletzt rechterhand stehenden Punkte Glieder andeuten, die mit höheren Potenzen von ε behaftet sind.

Da aber linkerhand nur die k^{te} Potenz der willkürlichen Grösse ε auftritt, so muss dasselbe auch rechts stattfinden d. h. es ist

$$(7) \qquad (-1)^k\frac{\varepsilon^k a_0'}{a_k} = (\varepsilon\alpha_1)(\varepsilon\alpha_2)\ldots(\varepsilon\alpha_k).$$

[1] Um nicht in unnöthige Schwierigkeiten zu kommen, lassen wir es ganz dahin gestellt, welchen (ganzzahligen oder gebrochenen) Werth die später doch wieder herausfallenden Exponenten d und e in (5), (6) besitzen.

Entsprechend verfährt man mit dem nächstfolgenden Quotienten $\frac{a_1}{a_k}$:

$$(-1)^{k-1}\frac{a_1}{a_k} = \frac{(-1)^{m-1}\frac{\varepsilon^{k-1}a_1'}{a_m}}{(-1)^{m-k}\frac{a_k}{a_m}},$$

mithin kommt für den Zähler des letzten Bruches:

$$\begin{aligned}
&(-1)^{m-1}\frac{\varepsilon^{k-1}a_1'}{a_m}(\alpha_{k+1}\dots\alpha_m) \\
= \quad &[(\varepsilon\alpha_1+\varepsilon^d\beta_1)\dots(\varepsilon\alpha_{k-1}+\varepsilon^d\beta_{k-1})(\alpha_{k+1}+\varepsilon^e\beta_{k+1})\dots(\alpha_m+\varepsilon^e\beta_m) \\
&+ \quad . \quad \dots \quad . \quad . \quad \dots \quad . \\
&+ \quad . \quad \dots \quad . \quad . \quad \dots \quad . \\
&+ (\varepsilon\alpha_2+\varepsilon^d\beta_2)\dots(\varepsilon\alpha_k+\varepsilon^d\beta_k)(\alpha_{k+1}+\varepsilon^e\beta_{k+1})\dots(\alpha_m+\varepsilon^e\beta_m)] \\
+ &\Big|(\varepsilon\alpha_1+\varepsilon^d\beta_1)\dots(\varepsilon\alpha_k+\varepsilon^d\beta_k)\{(\alpha_{k+1}+\varepsilon^e\beta_{k+1})\dots(\alpha_{m-1}+\varepsilon^e\beta_{m-1})+\dots \\
&\qquad + (\alpha_{k+2}+\varepsilon^e\beta_{k+2})\dots(\alpha_m+\varepsilon^e\beta_m)\}\Big|.
\end{aligned}$$

Rechts muss sich wiederum Alles auf die $(k-1)^{te}$ Potenz von ε reduciren, und es wird somit, nach beiderseitiger Division mit $(\alpha_{k+1}\dots\alpha_m)$:

$$(8) \qquad (-1)^{k-1}\frac{\varepsilon^{k-1}a_1'}{a_k} = (\varepsilon\alpha_1)(\varepsilon\alpha_2)\dots(\varepsilon\alpha_{k-1}) + \dots + (\varepsilon\alpha_2)(\varepsilon\alpha_3)\dots(\varepsilon\alpha_k).$$

Fährt man so fort, so erkennt man aus (7), (8) und den sich anschliessenden Formeln sofort, dass die Grössen $\varepsilon\alpha_1, \varepsilon\alpha_2, \dots, \varepsilon\alpha_k$ in (5) in der That mit den Wurzeln von φ_k (2) übereinstimmen.

Damit ist der zu Beginn dieser N° aufgestellte Hülfssatz [1] bewiesen.

4. Die Discriminante D_m einer binären Form f_m (1) werde, bis auf einen, später zu normirenden Zahlenfactor A_m, definirt als das Quadrat des

[1] Dieser Hülfssatz findet vielfache Anwendung in der Theorie von Singularitäten von Curven, vgl. die grosse Abhandlung des Verf. in den Wiener Monatsheften für Mathematik und Physik 1893.

Differenzenproductes der Wurzeln von f, multiplicirt mit der $2(m-1)^{\text{ten}}$ Potenz des Coefficienten a_m der höchsten Potenz von λ, in Zeichen:

$$(9)\quad D_m = A_m a_m^{2(m-1)} \Delta^2(\varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^d\beta_1, \ldots, \varepsilon\alpha_k + \varepsilon^d\beta_k, \alpha_{k+1} + \varepsilon^e\beta_{k+1}, \ldots, \alpha_m + \varepsilon^e\beta_m),$$

gemäss der Scheidung der Wurzeln von f in die beiden Gruppen (5), (6). Eben vermöge dieser Scheidung zerfällt das Quadrat des Differenzenproductes in drei wesentlich verschiedene Factoren:

1) $$\Delta^2(\varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^d\beta_1, \ldots, \varepsilon\alpha_k + \varepsilon^d\beta_k),$$

2) $$\Delta^2(\alpha_{k+1} + \varepsilon^e\beta_{k+1}, \ldots, \alpha_m + \varepsilon^e\beta_m),$$

3) das Quadrat des Productes aus den Differenzen je einer Grösse (5) und je einer Grösse (6).

Für den Factor 1) gilt aber:

$$1)\quad \Delta^2(\varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^d\beta_1, \ldots, \varepsilon\alpha_k + \varepsilon^d\beta_k) = \varepsilon^{k(k-1)}\Delta^2(\alpha_1 + \varepsilon^{d-1}\beta_1, \ldots, \alpha_k + \varepsilon^{d+1}\beta_k)$$
$$= \varepsilon^{k(k-1)}\Delta^2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) + \ldots,$$

wo die zuletzt stehenden Punkte wieder Glieder bezeichnen, die mit höheren Potenzen von ε multiplicirt sind.

Entwickelt man andererseits die unter 2) und 3) aufgeführten Ausdrücke nach steigenden Potenzen von ε, so kommt:

2) $$\Delta^2(\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_m) + \ldots,$$

3) $$(\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\ldots\alpha_m)^{2k} + \ldots,$$

wo es genügt, die (von ε freien) Anfangsglieder zu notiren.

Somit liefert die Entwickelung der Discriminante D_m (9) selbst nach steigenden Potenzen von ε:[1]

$$(9')\quad D_m = \varepsilon^{k(k-1)} A_m a_m^{2(m-1)} \Delta^2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)\Delta^2(\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_m)(\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\ldots\alpha_m)^{2k} + \ldots.$$

Drückt man das hingeschriebene erste Glied von D_m wieder rückwärts durch die ursprünglichen Coefficienten a von f aus, so hat man genau das Aggregat der Glieder in D_m, welche das Minimalgewicht, nemlich $k(k-1)$, besitzen.

[1] Dass die Entwickelung von D_m mit der $k(k-1)^{\text{ten}}$ Potenz von ε beginnt, hätte, auch ohne irgend eine Kenntniss von der Gestalt der Wurzeln von f, aus der Bézout'schen Form der Discriminante D_m geschlossen werden können.

Bezeichnet man die Discriminanten von φ_k (2) und ψ_{m-k} (3) mit D_k resp. $D^{(m-k)}$, so ist, nach Analogie mit der Definition (9), und mit Rücksicht auf den Hülfssatz der N° 3:

$$(10)\qquad D_k = A_k a_k^{2(k-1)} \Delta^2(\varepsilon\alpha_1, \varepsilon\alpha_2, \ldots, \varepsilon\alpha_k) = \varepsilon^{k(k-1)} A_k a_k^{2(k-1)} \Delta^2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k),$$

$$(11)\qquad D^{(m-k)} = A_{m-k} a^{2(m-k-1)} \Delta^2(\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_m),$$

$$(12)\qquad (\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\ldots\alpha_m)^2 = \left(\frac{a_k}{a_m}\right)^{2k}.$$

Setzt man diese Werthe in das Anfangsglied (9′) von D_m ein, und beachtet, dass sich die Potenzen von a_m in Zähler und Nenner zusammenziehen, wie folgt:

$$(13)\qquad a_m^{2(m+1)} \frac{1}{a_k^{2(k-1)}} \frac{1}{a_m^{2(m-k-1)}} \frac{a_k^{2k}}{a_m^{2k}} = a_k^2,$$

so ist das gemeinte Aggregat der Glieder in D_m vom Minimalgewichte $k(k-1)$ identisch mit dem Producte:

$$(14)\qquad \frac{A_m}{A_k A_{m-k}} a_k^2 D_k D^{(m-k)}.$$

Damit ist der Satz bewiesen:

Legt man den Coefficienten $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, \ldots, a_m$ einer binären Form $f_m(\lambda)$:

$$f_m(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_{k-1}\lambda^{k-1} + a_k\lambda^k + \ldots + a_m\lambda^m$$

successive die Gewichte $k, k-1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0$ bei, so zerfällt das Aggregat der Glieder in der Discriminante D_m von f, welche das Minimalgewicht $k(k-1)$ besitzen, abgesehen von einem Zahlenfactor, in die Factoren:

$$a_k^2 D_k D^{(m-k)},$$

wo D_k, $D^{(m-k)}$ die Discriminanten der Theilformen:

$$\begin{cases} \varphi_k(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_k\lambda^k, \\ \psi_{m-k}(\lambda) = a_k + a_{k+1}\lambda + \ldots + a_m\lambda^{m-k} \end{cases}$$

bedeuten.

Für $k = 0$ (resp. $k = m$) wird der Satz bedeutungslos, während er für $k = 1$ (resp. $k = m - 1$)[1] noch gültig bleibt, nur dass der Factor D_1 (resp. $D^{(1)}$) dann gar nicht auftritt, oder, was dasselbe ist, durch die Einheit zu ersetzen ist.

Symmetrischer hätte man den Coefficienten $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots, a_m$ die Gewichte $k, k-1, \dots, 1, 0, 1, \dots, m-k$ beilegen können; dann würde nur an Stelle des Minimalgewichts $k(k-1)$ unseres Satzes das Minimalgewicht $k(k-1) + (m-k)(m-k-1)$ treten.

5. Haben wir soeben den algebraischen Charakter des Ergebnisses hervortreten lassen, so möge nunmehr unser Augenmerk auf die geeignete Bestimmung der in (9′) und (14) auftretenden Zahlenfactoren gerichtet sein.

Für den Augenblick denke man sich die Form $f_m(\lambda)$ (1) vermöge einer zweiten Variabeln μ homogen gemacht. Man bilde sodann nach der Sylvester'schen Vorschrift die Resultante D'_m der Formen $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ und $\frac{\partial f}{\partial \mu}$, also

(15)
$$D'_m$$
$$- \begin{vmatrix} ma_0, & (m-1)a_1, & & \dots, & 2a_{m-2}, & a_{m-1}, & \\ & ma_0, & (m-1)a_1, & \dots, & & 2a_{m-2}, & a_{m-1}, \\ . & . & . & \dots & . & . & . \\ a_1, & 2a_2, & & \dots, & (m-1)a_{m-1}, & ma_m, & \\ & a_1, & 2a_2, & \dots, & & (m-1)a_{m-1}, & ma_m, \\ . & . & . & \dots & . & . & . \end{vmatrix}$$

Nennen wir die Wurzeln von f kurz $A_1, A_2, \dots, A_m$, so ist nach einer bekannten Formel[2] (Vgl. z. B. Faà di Bruno, l. c. p. 88 (13)):

(16) $$D'_m = (-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)} m^{m-2} a_m^{2(m-1)} \Delta^2(A_1, A_2, \dots, A_m).$$

[1] Der Fall $k = m - 1$ findet sich bei Faà di Bruno, *Theorie der binären Formen,* Deutsche Ausgabe, p. 90 unten.

[2] Die gemeinte Formel ist daselbst für die Resultante von $\frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ und $\frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial \mu}$ aufgestellt, nach leichter Umrechnung geht daraus die Formel (16) des Textes hervor.

Nun ist $\Delta^2(A_1, A_2, \ldots, A_m)$, als ganzzahlige symmetrische Function der A, eine ganzzahlige ganzrationale Function der elementar-symmetrischen Functionen der A, und zwar vom Grade $2(m-1)$. Also ist das Product $a_m^{2(m-1)}\Delta^2(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ eine ganzzahlige homogene Form der Coefficienten a. Da das Gleiche auch von der linken Seite D'_m der Formel (16) gilt, so muss D'_m durch m^{m-2} theilbar[1] sein. Vergleicht man dies Resultat mit der Definition (9'), so erkennt man, dass man den Zahlenfactor A_m am geeignetsten gleich $(-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)}$ setzen wird:

(9'')
$$D_m =$$
$$(-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)} a_m^{2(m-1)} \Delta^2(\varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^d\beta_1, \ldots, \varepsilon\alpha_k + \varepsilon^d\beta_k, \alpha_{k+1} + \varepsilon^e\beta_{k+1}, \ldots, \alpha_m + \varepsilon^e\beta_m).$$

Dann besteht zwischen D_m und D'_m (15) der Zusammenhang:

(17)
$$D_m = \frac{1}{m^{m-2}} D'_m,$$

und D_m ist ebenfalls eine ganzzahlige Form der a.

Damit reducirt sich der Zahlenfactor $\frac{A_m}{A_k A_{m-k}}$ in (14) auf

(18)
$$\frac{(-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)}}{(-1)^{\frac{1}{2}k(k-1)}(-1)^{\frac{1}{2}(m-k)(m-k-1)}} = (-1)^{k(m-k)}.$$

Auf Grund unseres Hauptsatzes können wir aber noch einen Schritt weiter gehen, und zeigen, dass die Form D_m (17) eine primitive ist d. h. dass der grösste gemeinschaftliche Theiler ihrer Coefficienten die Einheit ist.

Denn wäre dieser Theiler von der Einheit verschieden, so müsste er auch in jedem Bestandtheile von D_m aufgehen. Setzt man aber k gleich $m-1$, so ist, wie (14) lehrt, D_{m-1} ein solcher Bestandtheil. Dann müsste der gedachte Theiler auch in $D_{m-2}, D_{m-3}, \ldots, D_2$ aufgehen; es ist aber $D_2 = 4a_0a_2 - a_1^2$, also primitiv.

Wir drücken dieses Zwischenergebniss als einen besondern Satz aus:

Der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Coefficienten der Discrimi-

---

[1] Die Theilbarkeit von D'_m durch m^{m-2} geht auch direct aus dem Hauptsatze hervor, wenn man in (14) $k = m - 1$ setzt.

nantendeterminante D'_m (15) *ist gleich* m^{m-2}, *und demnach ist die durch* (17) *oder* (9″) *definirte Discriminantenform* $D_m = \frac{1}{m^{m-2}} D'_m$ *primitiv.*

Damit ist beiläufig die Frage entschieden, was man in der Zahlentheorie unter der Discriminante einer, ohne Binomialcoefficienten geschriebenen Binärform zu verstehen hat.

Auf Grund der Formel (18) sprechen wir folgende Ergänzung unseres Hauptsatzes (N° 4) aus:

Der in dem Hauptsatze nicht berücksichtigte Zahlenfactor des Productes $a_k^2 D_k D^{(m-k)}$ *ist einfach gleich* $(-1)^{k(m-k)}$, *falls die Discriminante einer binären Form durch* (17) *definirt wird.*

6. Einfacher gestalten sich die analogen Verhältnisse bei der Resultante zweier Binärformen:

$$(19) \qquad \begin{cases} f_m(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_k\lambda^k + a_{k+1}\lambda^{k+1} + \ldots + a_m\lambda^m, \\ g_n(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + \ldots + b_l\lambda^l + b_{l+1}\lambda^{l+1} + \ldots + b_n\lambda^n. \end{cases}$$

Indem wir hier wiederum mit der k^{ten} resp. l^{ten} Potenz von λ abbrechen, erhalten wir die Theilformen:

$$(20) \qquad \begin{cases} \varphi_k(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_k\lambda^k, \\ \varphi'_l(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + \ldots + b_l\lambda^l \end{cases}$$

nebst den zugehörigen Nebentheilformen:

$$(21) \qquad \begin{cases} \psi_{m-k}(\lambda) = a_k + a_{k+1}\lambda + \ldots + a_m\lambda^{m-k}, \\ \psi'_{m-l}(\lambda) = b_l + b_{l+1}\lambda + \ldots + b_n\lambda^{n-l}. \end{cases}$$

Unter der Resultante R_{mn} von f_m und g_n verstehen wir, wie üblich, die offenbar primitive Form:

$$(22) \qquad R_{mn} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & & \ldots \\ & a_0 & a_1 & a_2 & \ldots \\ . & . & . & . & \ldots \\ b_0 & b_1 & b_2 & & \ldots \\ & b_0 & b_1 & b_2 & \ldots \\ . & . & . & . & \ldots \end{vmatrix}.$$

Vermöge der Wurzeln $A_1, A_2, \ldots, A_m, B_1, B_2, \ldots, B_n$ von f_m, g_n drückt sich R_{mn} (Vgl. z. B. Faà di Bruno, l. c. p. 53 (12) und p. 74 oben) aus, wie folgt:

$$(23) \qquad \begin{aligned} R_{mn} = a_m^n b_n^m (A_1 - B_1)(A_2 - B_1)\ldots(A_m - B_1) \\ (A_1 - B_2)(A_2 - B_2)\ldots(A_m - B_2) \\ \cdot \qquad \cdot \qquad \cdots \qquad \cdot \\ (A_1 - B_n)(A_2 - B_n)\ldots(A_m - B_n). \end{aligned}$$

Vermöge der Substitutionen:

$$(24) \qquad \begin{cases} a_0 = \varepsilon^k a_0', \quad a_1 = \varepsilon^{k-1} a_1', \ \ldots, \ a_{k-1} = \varepsilon a_{k-1}', \quad a_k = a_k', \\ b_0 = \varepsilon^l b_0', \quad b_1 = \varepsilon^{l-1} b_1', \ \ldots, \ b_{l-1} = \varepsilon b_{l-1}', \quad b_l = b_l', \end{cases}$$

nehmen die Wurzeln A, B die Gestalt an:

$$(25) \qquad \begin{cases} \varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^d\beta_1, \ldots, \varepsilon\alpha_k + \varepsilon^d\beta_k, \alpha_{k+1} + \varepsilon^e\beta_{k+1}, \ldots, \alpha_m + \varepsilon^e\beta_m \quad (d > 1, e > 0), \\ \varepsilon\alpha_1' + \varepsilon^{d'}\beta_1', \ldots, \varepsilon\alpha_l' + \varepsilon^{d'}\beta_l', \alpha_{l+1}' + \varepsilon^{e'}\beta_{l+1}', \ldots, \alpha_n' + \varepsilon^{e'}\beta_n' \quad (d' > 1, e' > 0). \end{cases}$$

Führt man nunmehr das Product (23) aus, so ergiebt sich durch eine ganz ähnliche Rechnung, wie in N° 4, dass das Aggregat der mit der niedrigsten, nemlich $(kl)^{\text{ten}}$ Potenz von ε multiplicirten Glieder übereinstimmt mit dem Producte:

$$(26) \qquad (-1)^{l(m-k)} R_{kl} R^{(m-k, n-l)},$$

wo R_{kl}, $R^{(m-k,n-l)}$ die Resultanten der Formen (20) resp. (21) sind.

Somit gilt der Satz:

Legt man den Coefficienten $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, \ldots, a_m$; $b_0, b_1, \ldots, b_{l-1}, b_l, \ldots, b_n$ *der beiden binären Formen* $f_m(\lambda)$, $g_m(\lambda)$, (19) *die Gewichte* $k, k-1, \ldots, 1, 0, 0 \ldots 0$ *resp.* $l, l-1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots, 0$ *bei, so zerfällt das Aggregat der Glieder in der Resultante* R_{mn} *von* f *und* g, *welche das Minimalgewicht* kl *besitzen, in das Product*

$$(-1)^{l(m-k)} R_{kl} R^{(m-k,n-l)},$$

wo R_{kl}, $R^{(m-k,n-l)}$ *die Resultanten der Theilformen* $\varphi_k(\lambda)$, $\varphi_l'(\lambda)$ (20) *resp. der Nebentheilformen* $\psi_{m-k}(\lambda)$, $\psi_{n-l}'(\lambda)$ (21) *bedeuten.*

7. Die für die Discriminanten und Resultanten binärer Formen im Obigen aufgeworfenen und beantworteten Fragen lassen sich ohne Weiteres auch auf ternäre und höhere Formen ausdehnen; indessen stösst man hier auf solche Schwierigkeiten, dass eine Entscheidung vorderhand noch nicht möglich zu sein scheint.

Clausthal, d. 6 Februar 1895.

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT — JOURNAL

HERAUSGEGEBEN — RÉDIGÉ

230
345

VON — PAR

G. MITTAG-LEFFLER

---

19 : 1

STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
BERLIN — 1895. — PARIS
MAYER & MÜLLER. — A. HERMANN.
MARKGRAFENSTRASSE 51. — CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM. — 8 RUE DE LA SORBONNE.

REDACTION

Ausgegeben den 15. Februar 1894. — Paru le 15 février 1894.

Inhaltsverzeichniss. Table des matières.

	Seite. Pages.
Cousin, Pierre, Sur les fonctions de n variables complexes	1— 62
Wiman, A., Über die Doppelcurve auf den geradlinigen Flächen	63— 72
Sélivanoff, D., Sur les expressions algébriques	73— 92
Markoff, André, Deux démonstrations de la convergence de certaines fractions continues	93—104

Von diesem Bande werden einige Exemplare auf holländischem Papier zum Preise von 24 Mark verkauft.

Il est tiré de ce volume quelques exemplaires sur papier de Hollande au prix de 30 francs.

Preis des Bandes: 15 Mark. — Prix par volume: 18,75 francs.

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN

VON

JOURNAL

RÉDIGÉ

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

19: 2

STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
1895.

BERLIN
MAYER & MÜLLER
MARKGRAFENSTRASSE 51.

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE.

CENTRAL-TRYCKERIET. STOCKHOLM.

REDACTION

SVERIGE:

A. V. Bäcklund,	Lund.
H. Gyldén,	Stockholm.
A. Lindstedt,	»
G. Mittag-Leffler,	»
E. Phragmén,	»

NORGE:

C. A. Bjerknes,	Christiania.
S. Lie,	Leipzig.
L. Sylow,	Frederikshald.

DANMARK:

J. Petersen,	Kjöbenhavn.
H. G. Zeuthen,	»

FINLAND:

L. Lindelöf, Helsingfors.

Ausgegeben den 1. April 1895. — Paru le 1 avril 1895.

Inhaltsverzeichniss. Table des matières.

	Seite. Pages.
NETTO, E., Zur Theorie der orthogonalen Determinanten	105—114
KANTOR, S., Neue Theorie der eindeutigen periodischen Transformationen in der Ebene	115—194
VAHLEN, K. TH., Über reductible Binome	195—198
VAHLEN, K. TH., Über die Steinersche Fläche	199—200

Von diesem Bande werden einige Exemplare auf holländischem Papier zum Preise von 24 Mark verkauft.

Il est tiré de ce volume quelques exemplaires sur papier de Hollande au prix de 30 francs.

Preis des Bandes: 15 Mark. — Prix par volume: 18,75 francs.

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT HERAUSGEGEBEN VON

JOURNAL RÉDIGÉ PAR

G. MITTAG-LEFFLER

19: 3 & 4

STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
1895.

BERLIN
MAYER & MÜLLER
MARKGRAFENSTRASSE 51.

PARIS
A. HERMANN,
8 RUE DE LA SORBONNE.

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

REDACTION

Ausgegeben den 30. September 1895. — Paru le 30 septembre 1895.

Inhaltsverzeichniss. Table des matières.

	Seite. Pages.
LECORNU, LÉON, Mémoire sur le pendule de longueur variable	201—250
LIOUVILLE, R., Sur les équations de la dynamique	251—284
GOURSAT, E., Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre, et sur la théorie des intégrales intermédiaires	285—340
STÖRMER, CARL, Sur une généralisation de la formule $\frac{\varphi}{2} = \frac{\sin\varphi}{1} - \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 3\varphi}{3} - \ldots$	341—350
HURWITZ, A., Über die Anzahl der Classen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante	351—384
MEYER, FRANZ, Über die Structur der Discriminanten und Resultanten von binären Formen	385—395

Von diesem Bande werden einige Exemplare auf holländischem Papier zum Preise von 24 Mark verkauft.

Il est tiré de ce volume quelques exemplaires sur papier de Hollande au prix de 30 francs.

Preis des Bandes: 15 Mark. — Prix par volume: 18,75 francs.